

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΒΛΑΧΟΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2024

Περιεχόμενα

1	Καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2	7
1.1	Διάνυσμα ταχύτητας-Κανονικές καμπύλες	9
1.2	Αναπαραμετρήσεις καμπυλών	13
1.3	Μήκος καμπυλών	14
1.4	Μήκος τόξου-φυσική παράμετρος	17
1.5	Καμπυλότητα καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 . .	19
1.5.1	Καμπυλότητα καμπυλών με φυσική παράμετρο	19
1.5.2	Καμπυλότητα κανονικών καμπυλών με τυχούσα παράμετρο	24
1.5.3	Γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας	26
1.5.4	Πλαίσιο Frenet και εξισώσεις Frenet	27
1.6	Το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2	28
1.7	Ασκήσεις	30
2	Καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3	35
2.1	Καμπυλότητα και στρέψη καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3	37
2.1.1	Καμπυλότητα καμπυλών του \mathbb{R}^3	39
2.1.2	Πλαίσιο Frenet, στρέψη και εξισώσεις Frenet για καμπύλες του \mathbb{R}^3	42
2.2	Το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3	46
2.3	Επίπεδες καμπύλες	50
2.4	Καμπύλες σταθερής κλίσης	51
2.5	Σφαιρικές καμπύλες	53

2.6	Ασκήσεις	56
3	Επιφάνειες	59
3.1	Κανονικές Επιφάνειες	59
3.2	Διαφορίσιμες απεικονίσεις	69
3.3	Εφαπτόμενα διανύσματα και Εφαπτόμενο επίπεδο κανονικής επιφάνειας	71
3.4	Διαφορικό διαφορίσιμων απεικονίσεων μεταξύ κανονικών επιφανειών	74
3.5	Κανονικές Παραμετρικές Επιφάνειες	80
3.6	Ασκήσεις	82
4	Πρώτη θεμελιώδης μορφή	85
4.1	Πρώτη θεμελιώδης μορφή κανονικής επιφάνειας	85
4.1.1	Μήκος επιφανειακής καμπύλης	89
4.1.2	Εμβαδό	90
4.2	Έσωθεν γεωμετρία-Ισομετρίες	91
4.3	Ασκήσεις	98
5	Προσανατολισμός-Απεικόνιση Gauss	101
5.1	Προσανατολισμός-Μοναδιαίο κάθετο	101
5.2	Απεικόνιση Gauss	106
5.3	Ασκήσεις	110
6	Απεικόνιση Weingarten-Δεύτερη θεμελιώδης μορφή	111
6.1	Απεικόνιση Weingarten	111
6.2	Δεύτερη θεμελιώδης μορφή	116
6.3	Κάθετη καμπυλότητα	120
6.4	Κύριες καμπυλότητες	122
6.5	Καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα	125
6.6	Ελλειπτικά-υπερβολικά-παραβολικά-ισόπεδα-ομφαλικά σημεία	132
6.7	Ασυμπτωτικές διευθύνσεις-ασυμπτωτικές καμπύλες	139
6.8	Γραμμές καμπυλότητας	144
6.9	Τρίτη θεμελιώδης μορφή	149
6.10	Ελαχιστικές επιφάνειες	152
6.11	Ασκήσεις	156

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

7	Έξοχο Θεώρημα-Θεμελιώδες Θεώρημα των επιφανειών	161
7.1	Τύποι των Gauss και Weingarten	161
7.2	Έξοχο Θεώρημα	164
7.3	Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας των επιφανειών . .	166
7.4	Ασκήσεις	167
8	Ευθριογενείς-Αναπτυκτές επιφάνειες	169
8.1	Ευθριογενείς επιφάνειες	169
8.2	Αναπτυκτές επιφάνειες-Επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K = 0$	173
8.3	Ταξινόμηση των αναπτυκτών επιφανειών	175
8.4	Ασκήσεις	182
	Appendices	183
A'	Ο Ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^n	185
A'.1	Προσανατολισμός στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n	188
A'.2	Ισομετρίες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n	189
A'.2.1	Ισομετρίες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2	192
A'.2.2	Ισομετρίες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3	193
A'.2.3	Διανυσματικό και μικτό γινόμενο στον Ευκλεί- δειο χώρο \mathbb{R}^3	194
A'.3	Erlanger Programm-Γεωμετρική Ισοτιμία	196
B'	Η τοπολογία του \mathbb{R}^n	197
B'.1	Ανοικτά και κλειστά υποσύνολα	197
B'.2	Επαγόμενη τοπολογία	198
B'.3	Συνεχείς απεικονίσεις	199
B'.4	Ομοιομορφισμοί	199
B'.5	Συνεκτικότητα-συμπαγότητα	200
Γ'	Διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ Ευκλειδίων χώρων	203
Γ'.1	Παραγωγή διανυσματικών απεικονίσεων του Ευκλει- δείου χώρου \mathbb{R}^n μιας μεταβλητής	203
Γ'.2	Διαφορίσιμες απεικονίσεις και Διαφορικό απεικόνισης .	204
Γ'.3	Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης	207

Δ' Αυτοπροσηρτημένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί	209
------------------------------------------------	-----

Κεφάλαιο 1

Καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2

Το παρόν κεφάλαιο αφιερώνεται στη μελέτη των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 . Εισάγεται η θεμελιώδης έννοια της καμπυλότητας για κανονικές καμπύλες του χώρου \mathbb{R}^2 . Στόχος είναι να εξεταστεί σε ποιο βαθμό μια κανονική καμπύλη καθορίζεται από την καμπυλότητά της, ως προς ισομετρία του χώρου \mathbb{R}^2 .

Ορισμός 1.0.1. Καλούμε καμπύλη του \mathbb{R}^2 κάθε απεικόνιση $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό διάστημα. Η καμπύλη καλείται τάξης C^r , όπου $r \geq 1$ είναι φυσικός αριθμός, αν υπάρχουν οι παράγωγοί της έως r τάξης και είναι συνεχείς.

Θέτοντας

$$c(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ ονομάζονται **συναρτήσεις συντεταγμένων** της καμπύλης c , η δε ανωτέρω ισότητα θα αναφέρεται συχνά ως **παραμετρική παράσταση** της καμπύλης c . Προφανώς η καμπύλη c είναι τάξης C^r αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της είναι της ίδιας τάξης διαφορισιμότητας.

Η μεταβλητή $t \in I$ καλείται **παραμέτρος** της καμπύλης.

Τονίζεται ότι κατά τον ορισμό μας οι καμπύλες είναι απεικονίσεις και όχι σύνολα σημείων του \mathbb{R}^2 . Αναζητώντας φυσική ερμηνεία

της έννοιας, μπορούμε να φανταστούμε μια καμπύλη ως τροχιά ενός κινητού.

Το ακόλουθο υποσύνολο του \mathbb{R}^2

$$c(I) = \{c(t) : t \in I\}$$

ονομάζεται **εικόνα** της καμπύλης c . Επισημαίνουμε ότι δύο καμπύλες ενδέχεται να είναι διαφορετικές ακόμα και αν έχουν την ίδια ακριβώς εικόνα.

Αξίζει σε αυτό το σημείο να μνημονεύσουμε τη λεγόμενη χωροκορεστική καμπύλη του Peano. Πρόκειται για μια συνεχή καμπύλη $c: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ η οποία δεν είναι 1-1. Είναι όμως επί, δηλαδή η εικόνα της είναι ολόκληρο το τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$! Επιπλέον, η καμπύλη του Peano δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη (για λεπτομέρειες δεξ για παράδειγμα [2]).

Για την αποφυγή παθολογικών περιπτώσεων, όπως η καμπύλη του Peano, οι καμπύλες που θα μελετούμε θα είναι διαφορίσιμες καμπύλες. Συνήθως απαιτούμε η καμπύλη να είναι τουλάχιστον τάξης C^2 . Συχνά κάνουμε λόγο για λείες καμπύλες, εννοώντας ότι η καμπύλη είναι τέτοιας τάξης διαφορισιμότητας, όσο απαιτούν οι ανάγκες της θεωρίας.

Εισάγουμε ακολούθως την έννοια της γεωμετρικής ισοτιμίας των καμπυλών.

Ορισμός 1.0.2. Η καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, καλείται **γεωμετρικώς ισότιμη** της καμπύλης $\tilde{c}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ αν υπάρχει ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ τέτοια ώστε

$$\tilde{c} = T \circ c.$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί (πως;) ότι κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια σχέση ισοτιμίας (ισοδυναμίας) στο σύνολο όλων των καμπυλών του \mathbb{R}^2 . Δε διακρίνουμε μεταξύ καμπυλών οι οποίες διαφέρουν ως προς ισομετρία του \mathbb{R}^2 , δηλαδή μεταξύ γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών.

Τονίζουμε ότι στόχος μας είναι η μελέτη **γεωμετρικών ιδιοτήτων**, δηλαδή ιδιοτήτων που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τη δράση των Ευκλείδειων ισομετριών.

1.1 Διάνυσμα ταχύτητας-Κανονικές καμπύλες

Ορισμός 1.1.1. Έστω λεία καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με παραμετρική παράσταση $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Το διάνυσμα

$$c'(t_0) = \frac{dc}{dt}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

καλείται **εφαπτομενικό διάνυσμα** (ή **διάνυσμα ταχύτητας**) της καμπύλης c στο $t_0 \in I$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του εφαπτομενικού διανύσματος είναι η εξής: καθώς το t τείνει στο t_0 , η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $c(t)$ και $c(t_0)$ τείνει να λάβει μια οριακή θέση η οποία θα καλείται η **εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης c** , η οποία είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $c'(t_0)$ και καλά ορισμένη εφόσον $c'(t_0) \neq 0$. Αυτό μας αναγκάζει να περιορίσουμε τη μελέτη μας σε κανονικές καμπύλες.

Ορισμός 1.1.2. Μια λεία καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, καλείται **κανονική** αν ισχύει

$$c'(t) \neq 0, \text{ για κάθε } t \in I.$$

Έτσι η εφαπτομένη ευθεία μιας κανονικής καμπύλης c στο $t_0 \in I$ είναι εκείνη η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $c(t_0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα ταχύτητας $c'(t_0)$.

Εύκολα διαπιστώνεται (πως;) ότι η κανονικότητα καμπύλης είναι ιδιότητα αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ του \mathbb{R}^2 . Τούτο σημαίνει ότι αν c και \tilde{c} είναι γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες και η καμπύλη c είναι κανονική, τότε και η καμπύλη \tilde{c} είναι επίσης κανονική.

Ακολούθως παραθέτουμε παραδείγματα καμπυλών, κανονικών και μη κανονικών.

Παράδειγμα 1.1.1. Θεωρούμε την καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = p + tv, \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου $p \in \mathbb{R}^2$ και $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Πρόκειται περί κανονικής καμπύλης αφού ισχύει $c'(t) = v \neq 0$. Η εικόνα της είναι η ευθεία του \mathbb{R}^2 η οποία διέρχεται από το σημείο p και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $v \neq 0$. Πράγματι

$$c(\mathbb{R}) = p + \text{span}\{v\} = T_p(\text{span}\{v\}),$$

δηλαδή είναι εικόνα του μονοδιάστατου υποχώρου $\text{span}\{v\}$ του \mathbb{R}^2 μέσω της παράλληλης μεταφοράς T_p κατά p .

Παράδειγμα 1.1.2. Η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

είναι κανονική διότι ισχύει

$$c'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0, 0), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Η εικόνα της είναι ο κύκλος

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

δηλαδή ο κύκλος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $r = 1$. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε μια από τις καμπύλες

$$c_1(t) = (\cos t, -\sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$c_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

είναι κανονική και η εικόνα αμφοτέρων είναι ο κύκλος \mathbb{S}^1 .

Παράδειγμα 1.1.3. Η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (\cos t^2, \sin t^2), \quad t \in \mathbb{R},$$

δεν είναι κανονική διότι ισχύει

$$c'(0) = (0, 0).$$

Η εικόνα της είναι και πάλι ο κύκλος \mathbb{S}^1 .

Παράδειγμα 1.1.4. Η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

είναι γνωστή ως παραβολή του Neil. Δεν είναι κανονική καμπύλη διότι είναι $c'(0) = (0, 0)$.

Παράδειγμα 1.1.5. Η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου $a > 0$ και $b > 0$, είναι κανονική. Η εικόνα της είναι έλλειψη με ημιάξονες τους αριθμούς a, b . Παρατηρούμε ότι ισχύει $c(t+2\pi) = c(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή πρόκειται περί κλειστής καμπύλης. Ο περιορισμός της όμως στο διάστημα $[0, 2\pi)$ δεν έχει αυτοτομές, δηλαδή η καμπύλη $c|_{[0, 2\pi)}$ είναι 1-1.

Παράδειγμα 1.1.6. Η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = \left(\sin t, \frac{1}{2} \sin 2t \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

είναι κανονική και κλειστή αφού ισχύει $c(t+2\pi) = c(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Η εικόνα της δίδεται από την εξίσωση

$$x^4 + y^2 = x^2,$$

από όπου προκύπτει ότι είναι συμμετρική ως προς τους άξονες.

Παράδειγμα 1.1.7. Δοθείσης τυχούσας λείας συνάρτησης $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, θεωρούμε την καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (t, f(t)), \quad t \in I.$$

Η καμπύλη αυτή είναι κανονική διότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$c'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0).$$

Η εικόνα της καμπύλης αυτής είναι το γράφημα της συνάρτησης f ως προς τον άξονα Ox .

Ομοίως μπορούμε να θεωρήσουμε την κανονική καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (g(t), t), \quad t \in J,$$

της οποίας η εικόνα είναι γράφημα λείας συνάρτησης $g: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ως προς τον άξονα Oy .

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει μια συνέπεια της κανονικότητας.

Πρόταση 1.1.1. Έστω C^1 κανονική καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα. Για κάθε $t_0 \in I$, υπάρχει ανοικτό διάστημα $I_0 \subseteq I$ με $t_0 \in I_0$ τέτοιο ώστε ο περιορισμός της c στο I_0 να μην έχει αυτοτομές, δηλαδή να είναι 1-1. Επιπλέον, η καμπύλη τοπικά είναι γράφημα συνάρτησης είτε ως προς τον άξονα Ox , είτε ως προς τον άξονα Oy .

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη c έχει παραμετρική παράσταση $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Λόγω κανονικότητας έχουμε

$$c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέσουμε ότι $x'(t_0) \neq 0$. Επειδή η συνάρτηση x' είναι συνεχής, υπάρχει ανοικτό διάστημα $I_0 \subseteq I$ με $t_0 \in I_0$ τέτοιο ώστε $x'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I_0$. Επομένως η συνάρτηση $x = x(t)$ αντιστρέφεται για x κοντά στο $x(t_0)$ και η αντίστροφή της $t = t(x)$ διαφορίσιμη. Τότε είναι

$$\begin{aligned} c(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= (x, y(t(x))) \\ &= (x, f(x)), \end{aligned}$$

όπου f είναι η λεία συνάρτηση με $f(x) = y(t(x))$. Αυτό σημαίνει ότι κοντά στο t_0 η καμπύλη c είναι γράφημα συνάρτησης ως προς τον άξονα Ox .

Εργαζόμενοι ομοίως, προκύπτει ότι αν $y'(t_0) \neq 0$, τότε κοντά στο t_0 η καμπύλη είναι γράφημα συνάρτησης ως προς τον άξονα Oy . \square

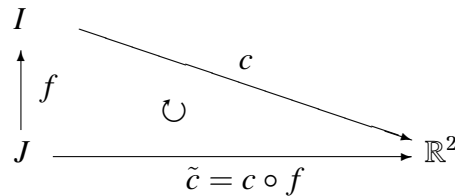
1.2 Αναπαραμετρήσεις καμπυλών

Έστω λεία καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παράμετρο $t \in I$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, και παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I.$$

Θεωρούμε λεία συνάρτηση $f: J \rightarrow I$, με $f(\sigma) = t$, όπου $J \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα.

Ορίζουμε τη λεία καμπύλη $\tilde{c} = c \circ f$, με παράμετρο $\sigma \in J$, η οποία ονομάζεται **αναπαραμέτρηση** της καμπύλης c .



Κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι η καμπύλη \tilde{c} έχει εφαπτομενικό διάνυσμα

$$\tilde{c}' = \frac{d\tilde{c}}{d\sigma} = \frac{df}{d\sigma} \frac{dc}{dt} = \frac{df}{d\sigma} c'.$$

Η καμπύλη \tilde{c} είναι κανονική αν και μόνο αν η καμπύλη c είναι κανονική και ισχύει $df/d\sigma > 0$ παντού στο J ή $df/d\sigma < 0$ παντού στο J . Σε αυτή την περίπτωση, η λεία καμπύλη $\tilde{c} = c \circ f$ καλείται **κανονική** ή **θεμιτή αναπαραμέτρηση** της καμπύλης c .

Δύο καμπύλες εκ των οποίων η μία είναι θεμιτή αναπαραμέτρηση της άλλης έχουν ακριβώς την ίδια εικόνα. Τούτο προκύπτει από το γεγονός ότι η λεία συνάρτηση $f: J \rightarrow I$ που υλοποιεί την αναπαραμέτρηση είναι 1-1.

Οι καμπύλες c_1, c_2 του Παραδείγματος 1.1.2 είναι θεμιτές αναπαραμετρήσεις της καμπύλης c του ίδιου παραδείγματος, με αντίστοιχες συναρτήσεις τις $f_1(t) = -t$ και $f_2(t) = 2t$. Η καμπύλη του Παραδείγματος 1.1.3 είναι αναπαραμέτρηση της καμπύλης c του Παραδείγματος 1.1.2, με αντίστοιχη συνάρτηση $f(t) = t^2$. Η αναπαραμέτρηση αυτή δεν είναι θεμιτή, αφού $f'(0) = 0$.

1.3 Μήκος καμπυλών

Έστω καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με παραμετρική παράσταση $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Θεωρούμε διάστημα $[a, b] \subset I$ και τυχούσα διαμέριση αυτού

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}.$$

Η λεπτότητα της διαμέρισης P είναι ο αριθμός

$$|P| = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \dots, k\}.$$

Τα σημεία $c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_i), \dots, c(t_k)$ ορίζουν πολυγωνική γραμμή, η οποία ενώνει τα ληκτικά σημεία $c(a), c(b)$ και έχει μήκος

$$L(c, P) = \sum_{i=1}^k d(c(t_i), c(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^k \|(c(t_i) - c(t_{i-1}))\|.$$

Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία διαμερίσεων P_n του διαστήματος $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n| = 0.$$

Αποδεικνύεται στη Μαθηματική Ανάλυση ότι αν η καμπύλη c είναι τάξης C^1 , τότε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} L(c, P_n)$ υπάρχει στο \mathbb{R} , είναι ανεξάρτητο της επιλογής της ακολουθίας διαμερίσεων και μάλιστα ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(c, P_n) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Ο αριθμός αυτός καλείται **μήκος της καμπύλης c από το a έως το b** και συμβολίζεται με $L_a^b(c)$, δηλαδή έχουμε

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Εύκολα διαπιστώνεται (πως;) ότι το μήκος είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της ομάδας ισομετριών $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Τούτο σημαίνει ότι αν c και \tilde{c} είναι γεωμετρικώς ισοτίμες καμπύλες, τότε ισχύει

$$L_a^b(\tilde{c}) = L_a^b(c).$$

1.3. ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Επιπλέον, με εφαρμογή του Θεωρήματος Αλλαγής Μεταβλητής Ολοκληρωμάτων, εύκολα προκύπτει ότι αν η καμπύλη \tilde{c} είναι θεμιτή αναπαραμέτρηση της καμπύλης c με $\tilde{c} = c \circ f$, $f(\tilde{a}) = a$ και $f(\tilde{b}) = b$, τότε ισχύει

$$L_a^b(c) = L_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}(\tilde{c})$$

αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ ισχύει

$$L_a^b(c) = L_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}(\tilde{c})$$

αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Πράγματι αν $t = f(\sigma)$, επειδή ισχύει

$$\int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|c'(f(\sigma))\| \frac{df}{d\sigma}(\sigma) d\sigma,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b \|c'(t)\| dt &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{df}{d\sigma}(\sigma) \frac{dc}{dt}(f(\sigma)) \right\| d\sigma \\ &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{d\tilde{c}}{d\sigma}(\sigma) \right\| d\sigma \\ &= L_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}(\tilde{c}) \end{aligned}$$

αν $df/d\sigma > 0$, ενώ ισχύει

$$\begin{aligned} \int_a^b \|c'(t)\| dt &= \int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \left\| \frac{df}{d\sigma}(\sigma) \frac{dc}{dt}(f(\sigma)) \right\| d\sigma \\ &= \int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} \left\| \frac{d\tilde{c}}{d\sigma}(\sigma) \right\| d\sigma \\ &= L_{\tilde{b}}^{\tilde{a}}(\tilde{c}) \end{aligned}$$

αν $df/d\sigma < 0$.

Ας διατυπώσουμε τώρα το ακόλουθο εύλογο πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μήκους.

Πρόβλημα 1.3.1. Δίνονται σημεία $p, q \in \mathbb{R}^2$. Υπάρχει λεία καμπύλη η οποία να συνδέει τα σημεία p, q και να έχει το ελάχιστο μήκος μεταξύ όλων των λείων καμπυλών του \mathbb{R}^2 οι οποίες έχουν ως ληκτικά σημεία τα p, q ;

Η απάντηση δίνεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.3.1. Δίνονται τα διακεκριμένα σημεία $p, q \in \mathbb{R}^2$. Κάθε C^1 κανονική καμπύλη $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $c(a) = p$ και $c(b) = q$ έχει μήκος

$$L_a^b(c) \geq d(p, q),$$

όπου $d(p, q)$ είναι η απόσταση των σημείων p, q . Επιπλέον, η ισότητα ισχύει μόνο αν η εικόνα της καμπύλης c είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία p, q .

Απόδειξη. Θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα

$$w = \frac{q - p}{\|q - p\|}.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\langle c'(t), w \rangle \leq |\langle c'(t), w \rangle| \leq \|c'(t)\|$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Επειδή

$$\frac{dc}{dt} \langle c(t), w \rangle = \langle c'(t), w \rangle,$$

ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε

$$d(p, q) = \langle q - p, w \rangle \leq \int_a^b |\langle c'(t), w \rangle| dt \leq L_a^b(c).$$

Αν $L_a^b(c) = d(p, q)$, τότε η παραπάνω ανισότητα γίνεται παντού ισότητα. Άρα τα διανύσματα $c'(t)$ και w είναι ομόροπα για κάθε $t \in [a, b]$, δηλαδή ισχύει

$$c'(t) = f(t)w,$$

όπου $f(t)$ είναι λεία και παντού θετική συνάρτηση. Τούτο σημαίνει ότι εικόνα της καμπύλης c είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία p, q (γιατί;). □

1.4 Μήκος τόξου-φυσική παράμετρος

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να εισάγουμε κατά φυσικό τρόπο μια θεμιτή αναπαραμέτρηση για κανονικές καμπύλες.

Θεωρούμε λεία καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με παραμετρική παράσταση $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Επιλέγουμε $t_0 \in I$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$s: I \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t \|c'(\sigma)\| d\sigma,$$

η οποία καλείται **μήκος τόξου της καμπύλης c με αφητηρία t_0** . Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $s(t)$ λαμβάνει αρνητικές τιμές για $t < t_0$, ενώ είναι $s(t) = L_{t_0}^t(c)$ αν $t > t_0$.

Αν αλλάξουμε αφητηρία, τότε το μήκος τόξου αλλάζει κατά μια σταθερά, λόγω της προσθετικής ιδιότητας των ολοκληρωμάτων.

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού προκύπτει ότι η συνάρτηση μήκος τόξου $s = s(t)$ είναι διαφορίσιμη, με παράγωγο

$$\frac{ds}{dt}(t) = \|c'(t)\|, \text{ για κάθε } t \in I.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η καμπύλη c είναι κανονική. Τότε έχουμε $ds/dt > 0$ παντού στο I . Σύμφωνα με το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης, η συνάρτηση $s = s(t)$ έχει λεία αντίστροφο f . Με άλλα λόγια, η παράμετρος t εκφράζεται ως διαφορίσιμη συνάρτηση του μήκους τόξου s , δηλαδή $t = f(s)$ ή πιο απλά $t = t(s)$.

Θεωρούμε τώρα την καμπύλη

$$\bar{c} = c \circ f$$

η οποία είναι θεμιτή αναπαραμέτρηση της c και ονομάζεται **αναπαραμέτρηση της καμπύλης c με φυσική παράμετρο ή με παράμετρο το μήκος τόξου** (χάριν συντομίας γράφουμε $c = \bar{c} = c \circ f$).

Κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι το διάνυσμα ταχύτητάς της είναι

$$\frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{dc}{dt} = \frac{1}{\|c'\|} c'.$$

Είναι φανερό ότι το διάνυσμα ταχύτητας της αναπαραμέτρησης με παράμετρο το μήκος τόξου είναι παντού μοναδιαίο.

Επομένως αποδείξαμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 1.4.1. Κάθε C^1 κανονική καμπύλη δέχεται θεμιτή αναπαραμέτρηση με παράμετρο το μήκος τόξου.

Συμβολίζουμε τις παραγώγους ως προς το μήκος τόξου με τελείες, δηλαδή

$$\dot{} = \frac{d}{ds}, \quad \ddot{} = \frac{d^2}{ds^2}, \quad \dots,$$

και ακολουθούμε από εδώ και στο εξής αυτή τη σύμβαση. Έτσι αν είναι

$$c(s) = (x(s), y(s)),$$

τότε έχουμε

$$\dot{c}(s) = \frac{dc}{ds}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$$

και

$$\ddot{c}(s) = \frac{d^2c}{ds^2}(s) = (\ddot{x}(s), \ddot{y}(s)).$$

Αντίστροφα, αν το διάνυσμα ταχύτητας μιας καμπύλης c με παράμετρο t είναι παντού μοναδιαίο, τότε το μήκος τόξου της με αφετηρία t_0 είναι η συνάρτηση

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|c'(\sigma)\| d\sigma = t - t_0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η παράμετρος t είναι μήκος τόξου ως προς κατάλληλη αφετηρία.

Συνεπώς αποδείξαμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 1.4.2. Μια λεία καμπύλη του χώρου \mathbb{R}^2 έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου αν και μόνο αν το εφαπτομενικό της διάνυσμα είναι παντού μοναδιαίο.

Παρατήρηση 1.4.1. Αν μια καμπύλη έχει παράμετρο το μήκος τόξου, τότε το αυτό ισχύει και για κάθε άλλη καμπύλη γεωμετρικώς ισοτιμη προς αυτή (γιατί;).

Παράδειγμα 1.4.1. Η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

και $r > 0$ έχει ως εικόνα τον κύκλο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $r > 0$. Είναι κανονική διότι ισχύει

$$\|c'(t)\| = r, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Το μήκος τόξου της c με αφετηρία t_0 είναι η συνάρτηση

$$s = s(t) = r(t - t_0).$$

Επιλέγοντας ως αφετηρία $t_0 = 0$, έχουμε $s = rt$. Έτσι προκύπτει ότι η αναπαραμέτρηση της καμπύλης c με φυσική παράμετρο είναι η καμπύλη

$$c(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right), \quad s \in \mathbb{R}.$$

1.5 Καμυλότητα καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2

1.5.1 Καμυλότητα καμπυλών με φυσική παράμετρο

Στόχος μας είναι να ορίσουμε την έννοια της καμυλότητας ως μέτρο απόκλισης τυχούσας καμπύλης από το γεωμετρικά απλούστερο είδος καμπυλών, δηλαδή τις ευθείες. Με άλλα λόγια, η καμυλότητα καμπύλης θα οριστεί ως ρυθμός μεταβολής της εφαπτομένης της ευθείας.

Κατ' αρχήν, θεωρούμε καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(s) = (x(s), y(s))$$

και φυσική παράμετρο, δηλαδή με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη ευθεία της στο τυχόν $s \in I$ σχηματίζει γωνία $\varphi(s)$ με τον άξονα Ox . Ο ρυθμός μεταβολής της εφαπτομένης ευθείας είναι η παράγωγος της γωνιακής συνάρτησης $\varphi(s)$. Είναι όμως η $\varphi(s)$ παραγωγίσιμη; Τούτο θα προκύψει από το ακόλουθο βοηθητικό συμπέρασμα.

Λήμμα 1.5.1. Υποθέτουμε ότι $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^1 συναρτήσεις οι οποίες πληρούν τη συνθήκη

$$f^2(t) + g^2(t) = 1, \text{ για κάθε } t \in I.$$

Τότε για κάθε $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ και $t_0 \in I$ με

$$f(t_0) = \cos \varphi_0, g(t_0) = \sin \varphi_0,$$

υπάρχει μοναδική C^1 συνάρτηση $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(t) = \cos \varphi(t), g(t) = \sin \varphi(t), \text{ για κάθε } t \in I$$

και

$$\varphi(t_0) = \varphi_0.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (f(\sigma)g'(\sigma) - f'(\sigma)g(\sigma)) d\sigma, t \in I.$$

Προφανώς ισχύει $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι

$$(f(t) - \cos \varphi(t))^2 + (g(t) - \sin \varphi(t))^2 = 0, \text{ για κάθε } t \in I,$$

ή ισοδύναμα ότι η συνάρτηση $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(t) = f(t) \cos \varphi(t) + g(t) \sin \varphi(t), t \in I,$$

είναι σταθερή και μάλιστα $h(t) = 1$ για κάθε $t \in I$. Όμως προκύπτει από τα δεδομένα (γιατί;) ότι ισχύει

$$h'(t) = 0, \text{ για κάθε } t \in I,$$

1.5. ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{R}^2

και επομένως η συνάρτηση h είναι σταθερή. Επιπλέον είναι

$$\begin{aligned} h(t_0) &= f(t_0) \cos \varphi(t_0) + g(t_0) \sin \varphi(t_0) \\ &= f^2(t_0) + g^2(t_0) = 1, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. \square

Είναι φανερό ότι αν στο Λήμμα 1.5.1 δεν προκαθορίσουμε την τιμή $\varphi(t_0)$ της γωνιακής συνάρτησης φ στο $t_0 \in I$, τότε υπάρχουν άπειρες τέτοιες γωνιακές συναρτήσεις. Επιπλέον, αν φ και $\tilde{\varphi}$ είναι δύο τέτοιες συναρτήσεις, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε (γιατί;)

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) + 2k\pi, \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Επειδή η καμπύλη c με παραμετρική παράσταση $c(s) = (x(s), y(s))$ έχει φυσική παράμετρο $s \in I$, λόγω της Πρότασης 1.4.2 ισχύει

$$\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1, \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Αν η καμπύλη c είναι τάξης C^2 , τότε σύμφωνα με το ανωτέρω λήμμα υπάρχει C^1 γωνιακή συνάρτηση $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\dot{x}(s) = \cos \varphi(s), \quad \dot{y}(s) = \sin \varphi(s), \quad \text{για κάθε } s \in I. \quad (1.1)$$

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τον ορισμό της καμπυλότητας για καμπύλες του \mathbb{R}^2 με φυσική παράμετρο.

Ορισμός 1.5.1. Ονομάζουμε **καμπυλότητα** μιας C^2 καμπύλης $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, με φυσική παράμετρο $s \in I$, τη συνεχή συνάρτηση $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$k(s) = \dot{\varphi}(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s).$$

Η καμπυλότητα είναι καλώς ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη της επιλογής της γωνιακής συνάρτησης φ , αφού δύο τέτοιες γωνιακές συναρτήσεις διαφέρουν κατά σταθερά.

Από τις ισότητες (1.1) έχουμε

$$\ddot{x} = -k\dot{y} \quad \text{και} \quad \ddot{y} = k\dot{x},$$

απ' όπου εύκολα λαμβάνουμε το ακόλουθο συμπέρασμα, το οποίο μας παρέχει ένα άμεσο τρόπο υπολογισμού της καμπυλότητας μιας καμπύλης με φυσική παράμετρο βάσει των συναρτήσεων συντεταγμένων της.

Πρόταση 1.5.2. Η καμπυλότητα $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ μιας C^2 καμπύλης $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και παραμετρική παράσταση

$$c(s) = (x(s), y(s)), \quad s \in I,$$

δίνεται από τη σχέση

$$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}.$$

Ας θεωρήσουμε τη στροφή $J = R_{\pi/2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ κατά γωνία $\pi/2$. Επειδή

$$J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1),$$

άμεσα προκύπτει από την Πρόταση 1.5.2 ότι η καμπυλότητα δίνεται επίσης από τη σχέση

$$k = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle.$$

Το διάνυσμα \ddot{c} αναφέρεται ως το διάνυσμα επιτάχυνσης της καμπύλης c .

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 1.5.2 προκύπτει ότι η καμπύλη

$$c(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right), \quad s \in \mathbb{R}$$

του Παραδείγματος 1.4.1 με φυσική παράμετρο $s \in \mathbb{R}$, της οποίας η εικόνα είναι κύκλος ακτίνας $r > 0$, έχει σταθερή καμπυλότητα $k = 1/r$.

Παρατήρηση 1.5.1. Σημειώνουμε ότι αν θεωρήσουμε τη θεμιτή αναπαραμέτρηση $\tilde{c} = c \circ f$ της καμπύλης c με $f(s) = -s$, τότε και η καμπύλη \tilde{c} έχει επίσης φυσική παράμετρο $\tilde{s} = -s$, ενώ οι καμπυλότητές τους \tilde{k} και k αντίστοιχα, συνδέονται μέσω της σχέσεως

$$\tilde{k} = -k.$$

1.5. ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{R}^2

Είναι η καμπυλότητα γεωμετρική έννοια; Με άλλα λόγια, πως σχετίζονται οι καμπυλότητες δύο γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών; Η απάντηση δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.5.3. Οι καμπυλότητες k και \tilde{k} των λείων και γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών c και $\tilde{c} = T \circ c$, αμοτέρων με φυσική παράμετρο¹ και $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, πληρούν τη σχέση

$$\tilde{k} = \varepsilon k,$$

όπου $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$, αν η ισομετρία T διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Εύκολα προκύπτει ότι τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης της καμπύλης \tilde{c} δίνονται αντίστοιχα από τις ισότητες

$$\dot{\tilde{c}} = T_* \dot{c} \quad \text{και} \quad \ddot{\tilde{c}} = T_* \ddot{c},$$

όπου $T_* \in O(2)$ είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T , δηλαδή $T = T_\nu \circ T_*$ και T_ν είναι παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα ν . Επομένως για την καμπυλότητα της καμπύλης \tilde{c} έχουμε

$$\tilde{k} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}} \rangle = \langle T_* \ddot{c}, J \circ T_* \dot{c} \rangle.$$

Γνωρίζουμε ότι ο ορθογώνιος μετασχηματισμός T_* είναι είτε στροφή, είτε κατοπτρισμός ως προς ευθεία. Εύκολα ελέγχεται ότι ισχύει (πως;)

$$J \circ T_* = T_* \circ J$$

αν T_* είναι στροφή, ενώ ισχύει

$$J \circ T_* = -T_* \circ J$$

αν T_* είναι κατοπτρισμός ως προς ευθεία, από όπου άμεσα προκύπτει το ζητούμενο. \square

¹Βλέπε Παρατήρηση 1.4.1.

1.5.2 Καμπυλότητα κανονικών καμπυλών με τυχούσα παράμετρο

Έχουμε έως τώρα ορίσει την καμπυλότητα για καμπύλες του \mathbb{R}^2 με φυσική παράμετρο. Πως ορίζεται όμως η καμπυλότητα για κανονικές καμπύλες με τυχούσα παράμετρο;

Έστω C^2 κανονική καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I.$$

Θεωρούμε τη θεμιτή αναπαραμέτρηση $\bar{c} = c \circ f$ της καμπύλης c με φυσική παράμετρο, όπου $t = f(s)$ (ή πιο απλά $t = t(s)$) είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης μήκος τόξου $s = s(t)$.

Αν \bar{k} είναι η καμπυλότητα της καμπύλης \bar{c} όπως ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα, τότε ορίζουμε ως καμπυλότητα της καμπύλης c τη συνεχή συνάρτηση $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$k = \bar{k} \circ s,$$

ή ισοδύναμα

$$k(t) = \bar{k}(s(t)), \quad t \in I.$$

Η αναπαραμέτρηση $\bar{c} = c \circ f$ της καμπύλης c έχει μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας (θυμίζουμε ότι χάριν συντομίας γράφουμε $c = \bar{c} \circ f$)

$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{1}{\|c'\|} c'.$$

Κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dt}{ds} \frac{dx}{dt} = \frac{dt}{ds} x', \\ \dot{y} &= \frac{dt}{ds} \frac{dy}{dt} = \frac{dt}{ds} y', \\ \ddot{x} &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 x'' + \frac{d^2t}{ds^2} x', \\ \ddot{y} &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 y'' + \frac{d^2t}{ds^2} y'. \end{aligned}$$

1.5. ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{R}^2

Όμως η παράγωγος της συνάρτησης μήκους τόξου είναι

$$\frac{ds}{dt} = \|c'\|.$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|} = \frac{1}{((x')^2 + (y')^2)^{1/2}}.$$

Από τις ανωτέρω ισότητες προκύπτει εύκολα το ακόλουθο συμπέρασμα, το οποίο μας παρέχει ένα τρόπο υπολογισμού της καμπυλότητας κανονικών καμπυλών του \mathbb{R}^2 με τυχούσα παράμετρο.

Πρόταση 1.5.4. Η καμπυλότητα $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ μιας C^2 κανονικής καμπύλης $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, με παράμετρο $t \in I$ και παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

είναι η συνάρτηση

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}},$$

ή ισοδύναμα

$$k = \frac{\langle c'', Jc' \rangle}{\|c'\|^3}.$$

Ως εφαρμογή της ανωτέρω πρότασης, προκύπτει ότι οι καμπύλες γραφήματα συναρτήσεων του Παραδείγματος 1.1.7 με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (t, f(t))$$

έχουν καμπυλότητα

$$k = \frac{f''}{(1 + (f')^2)^{3/2}}.$$

1.5.3 Γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας

Η προηγούμενη έκφραση για την καμπυλότητα των καμπυλών γραφημάτων μας επιτρέπει να δώσουμε την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία της καμπυλότητας.

Ας θεωρήσουμε καμπύλες c και \tilde{c} του \mathbb{R}^2 , αμφότερες με φυσική παράμετρο $s \in I \subseteq \mathbb{R}$, των οποίων οι καμπυλότητες πληρούν την ανισότητα

$$k(s_0) > \tilde{k}(s_0)$$

για κάποιο $s_0 \in I$. Επειδή, λόγω της Πρότασης 1.5.3, η καμπυλότητα δεν αλλάζει αν μετατοπίσουμε τις καμπύλες με ισομετρίες του \mathbb{R}^2 οι οποίες διατηρούν τον προσανατολισμό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$c(s_0) = \tilde{c}(s_0) = (0, 0) \text{ και } \dot{c}(s_0) = \dot{\tilde{c}}(s_0) = (1, 0).$$

Τότε όμως, σύμφωνα με τη Πρόταση 1.1.1, οι καμπύλες γράφονται κοντά στο σημείο $(0, 0)$ ως γραφήματα, ως προς τον άξονα Ox , λείων συναρτήσεων f και \tilde{f} οι οποίες ορίζονται σε κατάλληλο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$, όπου $\varepsilon > 0$ είναι αρκούντως μικρό, και πληρούν

$$f(0) = 0 = \tilde{f}(0) \text{ και } f'(0) = 0 = \tilde{f}'(0).$$

Επειδή $k(0) > \tilde{k}(0)$, έχουμε

$$f''(0) > \tilde{f}''(0).$$

Τότε η συνάρτηση

$$g = f - \tilde{f}$$

έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο 0. Τούτο γεωμετρικά σημαίνει ότι, κοντά στο σημείο $(0, 0)$, η εικόνα της καμπύλης c βρίσκεται υπεράνω της εικόνας της καμπύλης \tilde{c} .

Ειδικά, αν η καμπύλη \tilde{c} είναι ευθεία, δηλαδή είναι $\tilde{k} = 0$, προκύπτει ότι μια καμπύλη με καμπυλότητα $k > 0$ είναι τοπικά κυρτή. Αυτό σημαίνει ότι τοπικά περιέχεται σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα με ακμή την εφαπτόμενη της ευθείας.

Αν υποθέσουμε ότι κοντά στο σημείο $(0, 0)$ η εικόνα της καμπύλης c βρίσκεται υπεράνω της εικόνας της καμπύλης \tilde{c} . Τότε, επειδή η συνάρτηση

$$g = f - \tilde{f}$$

έχει ελάχιστο στο 0, έχουμε

$$g''(0) \geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$k(0) \geq \tilde{k}(0).$$

1.5.4 Πλαίσιο Frenet και εξισώσεις Frenet

Έστω C^2 καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση $c(s) = (x(s), y(s))$ και φυσική παράμετρο $s \in I$. Ονομάζουμε **μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης c στο $s \in I$ το διάνυσμα $\vec{t}(s)$ με

$$\vec{t}(s) = \dot{c}(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)), \quad s \in I,$$

όπου φ είναι γωνιακή συνάρτηση η οποία πληροί την (1.1).

Στρέφοντας το διάνυσμα $\vec{t}(s)$ κατά γωνία $\pi/2$, λαμβάνουμε το **μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα**

$$\vec{n}(s) = J\vec{t}(s) = (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s)), \quad s \in I,$$

το οποίο καλείται **μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα** της καμπύλης c στο $s \in I$.

Είναι φανερό ότι για κάθε $s \in I$ τα διανύσματα $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$ συνιστούν μια ορθομοναδιαία και δεξιόστροφη βάση του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 , η οποία καλείται **πλαίσιο Frenet** της καμπύλης c .

Από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{\vec{t}} &= \frac{d\varphi}{ds} (-\sin \varphi, \cos \varphi), \\ \dot{\vec{n}} &= -\frac{d\varphi}{ds} (\cos \varphi, \sin \varphi), \end{aligned}$$

προκύπτουν, αντίστοιχα, οι λεγόμενες **εξισώσεις Frenet** της καμπύλης c , δηλαδή οι εξισώσεις

$$\begin{cases} \dot{\vec{t}} = k\vec{n}, \\ \dot{\vec{n}} = -k\vec{t}. \end{cases}$$

Για κανονική καμπύλη c με τυχούσα παράμετρο t , το πλαίσιο Frenet είναι

$$\vec{t}(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|} c'(t), \quad \vec{n}(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|} Jc'(t).$$

Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $c(t_0)$ και είναι παράλληλη προς το κάθετο διάνυσμα $\vec{n}(t_0)$ καλείται **κάθετη ευθεία** της καμπύλης c στο t_0 .

1.6 Το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο συμπέρασμα θεμελιώδους σημασίας για τη θεωρία των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 .

Θεώρημα 1.6.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα). (i) (Υπαρξη) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $k(s), s \in I \subseteq \mathbb{R}$, υπάρχει C^2 καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο s και καμψυλότητα τη δοθείσα συνάρτηση $k: I \rightarrow \mathbb{R}$.

(ii) (Μοναδικότητα) Θεωρούμε C^2 καμπύλες $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ και $\tilde{c}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, αμφότερες με φυσική παράμετρο $s \in I$, και καμψυλότητες k και \tilde{k} , αντίστοιχα. Αν οι καμψυλότητες είναι ίσες², δηλαδή αν ισχύει $\tilde{k}(s) = k(s)$ για κάθε $s \in I$, τότε υπάρχει ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, τέτοια ώστε $\tilde{c} = T \circ c$, δηλαδή οι καμπύλες c και \tilde{c} είναι γεωμετρικώς ισότιμες.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τη C^1 συνάρτηση $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s k(\sigma) d\sigma,$$

²Είναι προφανές ότι αν οι καμψυλότητες πληρούν $\tilde{k} = -k$, τότε υπάρχει ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ η οποία αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τέτοια ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.

1.6. ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{R}^2

όπου $s_0 \in I$. Εν συνεχεία, ορίζουμε την C^2 καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \varphi(\sigma) d\sigma, \int_{s_0}^s \sin \varphi(\sigma) d\sigma \right).$$

Το εφαπτομενικό της διάνυσμα είναι μοναδιαίο αφού είναι

$$\frac{dc}{ds}(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)).$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 1.4.2, η παράμετρος s είναι μήκος τόξου για την καμπύλη c . Προφανώς η καμπυλότητά της που εξ ορισμού είναι η παράγωγος της συνάρτησης $\varphi(s)$, λόγω γνωστού θεωρήματος από τη Μαθηματική Ανάλυση, δίνεται από την ισότητα

$$\frac{d\varphi}{ds}(s) = k(s).$$

(ii) Επιλέγουμε $s_0 \in I$ και στροφή $A \in O(2)$ τέτοια ώστε

$$A\dot{c}(s_0) = \dot{c}(s_0).$$

Θεωρούμε τις παραράλληλες μεταφορές T_v κατά $v = c(s_0)$ και T_w κατά $w = -\tilde{c}(s_0)$.

Ορίζουμε τώρα την καμπύλη

$$\bar{c} = T \circ \tilde{c},$$

όπου $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ είναι η ισομετρία με

$$T = T_v \circ A \circ T_w.$$

Η καμπύλη \bar{c} , ως γεωμετρικώς ισότιμη της \tilde{c} , έχει προφανώς ως παράμετρο το μήκος τόξου s . Επιπλέον, επειδή η ισομετρία T διατηρεί τον προσανατολισμό, λόγω της Πρότασης 1.5.3 η καμπύλη \bar{c} έχει καμπυλότητα $\bar{k} = k$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$\bar{c}(s_0) = c(s_0) \text{ και } \dot{\bar{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0). \quad (1.2)$$

Έστω $\varphi(s)$ και $\bar{\varphi}(s)$ γωνιακές συναρτήσεις των καμπυλών c και \bar{c} , αντίστοιχα, δηλαδή,

$$\dot{c}(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)) \quad \text{και} \quad \dot{\bar{c}}(s) = (\cos \bar{\varphi}(s), \sin \bar{\varphi}(s)). \quad (1.3)$$

Λόγω της δεύτερης από τις ισότητες (1.2), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varphi(s_0) = \bar{\varphi}(s_0)$. Όμως τότε έχουμε

$$k(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s) = \frac{d\bar{\varphi}}{ds}(s),$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d(\varphi - \bar{\varphi})}{ds}(s) = 0, \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Επειδή $\varphi(s_0) = \bar{\varphi}(s_0)$, λαμβάνουμε $\varphi(s) = \bar{\varphi}(s)$ για κάθε $s \in I$. Από τις ισότητες (1.3) έχουμε

$$\frac{d(c - \bar{c})}{ds}(s) = 0, \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Λόγω της πρώτης από τις σχέσεις (1.2), τελικώς βρίσκουμε ότι

$$\bar{c}(s) = c(s), \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Συνεπώς προκύπτει ότι $\tilde{c} = T^{-1} \circ c$ και η απεικόνιση T^{-1} είναι ισομετρία η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό. \square

Άμεση συνέπεια είναι το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πόρισμα 1.6.2. *Οι μόνες λείες κανονικές καμπύλες του \mathbb{R}^2 με σταθερή καμπυλότητα είναι ευθείες (ή τμήματα αυτών) και κύκλοι (ή τόξα κύκλων).*

1.7 Ασκήσεις

1. Δίνεται η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.7. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (i) Εξετάστε αν η c είναι κανονική καμπύλη. Βρείτε τη συνάρτηση μήκους τόξου της με αφετηρία $t_0 = 0$.
- (ii) Βρείτε αναπαράμετρηση με παράμετρο το μήκος τόξου.
- (iii) Υπολογίστε την καμπυλότητά της ως συνάρτηση της παραμέτρου t , αλλά και ως συνάρτηση του μήκους τόξου.
- (iv) Υπολογίστε το πλαίσιο Frenet συναρτήσει της παραμέτρου t , αλλά και συναρτήσει του μήκους τόξου.
- (v) Υπάρχει εφαπτομένη ή κάθετη ευθεία της καμπύλης c η οποία διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$;

2. Δίνεται η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = \left(t, a \cosh\left(\frac{t}{a} + b\right) \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου $a \neq 0$ και b είναι πραγματικοί αριθμοί. Να υπολογιστεί η καμπυλότητά της ως συνάρτηση του μήκους τόξου.

3. Να βρεθεί η καμπύλη $c(s)$ του \mathbb{R}^2 με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in \mathbb{R}$ και καμπυλότητα $k(s) = -5$, τέτοια ώστε

$$c(0) = (1, 1) \quad \text{και} \quad \dot{c}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

4. Να βρεθούν όλες οι καμπύλες $c(s)$ του \mathbb{R}^2 με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in \mathbb{R}$ και μοναδιαίο κάθετο

$$\vec{n}(s) = (-\sin s, \cos s).$$

5. Αποδείξτε ότι οι μόνες καμπύλες του \mathbb{R}^2 , οι οποίες έχουν την ιδιότητα ότι οι κάθετες ευθείες να διέρχονται από σταθερό σημείο p_0 , είναι τόξα κύκλου κέντρου p_0 .
6. Αποδείξτε ότι οι μόνες καμπύλες του \mathbb{R}^2 , οι οποίες έχουν την ιδιότητα οι εφαπτόμενες ευθείες να απέχουν σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο, είναι τμήματα ευθείας ή τόξα κύκλου.

7. Δίνεται η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (R \cos^3 t, R \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

όπου R είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

- (i) Να εξεταστεί ως προς την κανονικότητα.
 - (ii) Να υπολογιστεί το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0 = 0$.
 - (iii) Να υπολογιστεί το μήκος της.
 - (iv) Βρείτε αναπαραμέτρησή της με παράμετρο το μήκος τόξου, σε κατάλληλο διάστημα.
8. Έστω $c(s)$ καμπύλη του \mathbb{R}^2 με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ και καμπυλότητα $k(s) \neq 0$ για κάθε $s \in I$. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\tilde{c}(s) = c(s) + \frac{1}{k(s)} \vec{n}(s),$$

όπου $\vec{n}(s)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο της καμπύλης c .

- (i) Να εξεταστεί αν η καμπύλη \tilde{c} είναι κανονική.
 - (ii) Αν η καμπύλη \tilde{c} είναι κανονική, να βρεθεί το πλαίσιο Frenet καθώς και η καμπυλότητά της.
9. Έστω $c(s)$ καμπύλη του \mathbb{R}^2 με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in [a, b]$. Για κάθε $\sigma \in \mathbb{R}$, θεωρούμε την καμπύλη

$$c_\sigma(s) = c(s) + \sigma \vec{n}(s),$$

όπου $\vec{n}(s)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο της καμπύλης c .

- (i) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη c_σ είναι κανονική για σ αρκούντως μικρό. Βρείτε το πλαίσιο Frenet της c_σ .
- (ii) Να αποδείξετε επιπλέον ότι, για σ αρκούντως μικρό, η καμπυλότητα k_σ της καμπύλης c_σ είναι

$$k_\sigma(s) = \frac{k(s)}{1 - \sigma k(s)},$$

όπου $k(s)$ είναι η καμπυλότητα της καμπύλης c .

1.7. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10. Δίνονται οι καμπύλες $c_1, c_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με παραμετρικές παραστάσεις

$$c_1(t) = (f(t), t) \text{ και } c_2(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}f(t) + \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}f(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}t \right), t \in \mathbb{R},$$

όπου $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση. Αποδείξτε ότι καμπύλες c_1 και c_2 είναι γεωμετρικώς ισοτιμες.

11. Δίνεται καμπύλη $c: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, με παράμετρο το μήκος τόξου s , για την οποία υπάρχει $s_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε η απόσταση $d(c(s), O)$ του τυχόντος σημείου της καμπύλης από την αρχή O του \mathbb{R}^2 λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της για $s = s_0$. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα $k(s)$ της καμπύλης c στο s_0 πληροί την ανισότητα $|k(s_0)| \geq k_0$, όπου $k_0 > 0$ είναι η καμπυλότητα του κύκλου κέντρου O ο οποίος διέρχεται από το σημείο $c(s_0)$.

Κεφάλαιο 2

Καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3

Αυτό το κεφάλαιο αφιερώνεται στη μελέτη των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 . Η θεωρία τους παρουσιάζει ομοιότητες, αλλά και σημαντικές διαφορές από τη θεωρία των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 .

Ορισμός 2.0.1. Μια καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 είναι μια απεικόνιση $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα. Η καμπύλη c καλείται τάξης C^r , όπου $r \geq 1$ είναι φυσικός αριθμός, αν υπάρχουν οι παράγωγοί της έως r τάξης και είναι συνεχείς.

Θέτοντας

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

οι συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ ονομάζονται συναρτήσεις συντεταγμένων της καμπύλης, η δε ανωτέρω ισότητα θα αναφέρεται συχνά ως **παραμετρική παράσταση** της καμπύλης c . Η μεταβλητή $t \in I$ καλείται **παραμέτρος** της καμπύλης. Προφανώς η καμπύλη c είναι τάξης C^r αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της είναι της ίδιας τάξης. Συνήθως απαιτούμε η καμπύλη να είναι τουλάχιστον C^3 τάξης. Συχνά κάνουμε λόγο για λείες καμπύλες, εννοώντας ότι η καμπύλη είναι τέτοιας τάξης διαφορισιμότητας όσο απαιτούν οι ανάγκες της θεωρίας.

Αξίζει να τονιστεί ότι, κατά τον ορισμό μας οι καμπύλες είναι απεικονίσεις και όχι σύνολα σημείων του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 . Αναζητώντας φυσική ερμηνεία της έννοιας, μπορούμε να φανταστούμε μια καμπύλη c ως τροχιά ενός κινητού το οποίο τη χρονική στιγμή $t \in I$ βρίσκεται στη θέση $c(t)$.

Το υποσύνολο του χώρου \mathbb{R}^3

$$c(I) = \{c(t) : t \in I\}$$

ονομάζεται **εικόνα** της καμπύλης c . Επισημαίνουμε ότι δύο καμπύλες μπορεί να είναι διαφορετικές ακόμη και αν έχουν την ίδια ακριβώς εικόνα.

Η γεωμετρική ισοτιμία για καμπύλες του χώρου \mathbb{R}^3 ορίζεται όπως και στην περίπτωση των καμπυλών του \mathbb{R}^2 .

Ορισμός 2.0.2. Μια καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ καλείται **γεωμετρικώς ισότιμη** μιας καμπύλης $\tilde{c}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, αν υπάρχει ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ τέτοια ώστε

$$\tilde{c} = T \circ c.$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί (πως;) ότι κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια σχέση ισοτιμίας (ισοδυναμίας) στο σύνολο όλων των καμπυλών του χώρου \mathbb{R}^3 . Δε διακρίνουμε μεταξύ καμπυλών οι οποίες διαφέρουν ως προς ισομετρία του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , δηλαδή μεταξύ γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών. Θυμίζουμε ότι στόχος μας είναι η μελέτη **γεωμετρικών ιδιοτήτων**, δηλαδή ιδιοτήτων που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τη δράση των Ευκλείδειων ισομετριών.

Ορισμός 2.0.3. Έστω λεία καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα, με παραμετρική παράσταση $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$. Το διάνυσμα

$$c'(t_0) = \frac{dc}{dt}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

καλείται **εφαπτομενικό διάνυσμα** (ή **διάνυσμα ταχύτητας**) της καμπύλης c στο $t_0 \in I$. Η καμπύλη c καλείται **κανονική** αν ισχύει

$$c'(t) \neq 0, \text{ για κάθε } t \in I.$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του εφαπτομενικού διανύσματος είναι ότι καθώς το t τείνει στο t_0 , η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $c(t)$ και $c(t_0)$ τείνει να λάβει μια οριακή θέση η οποία θα καλείται η **εφαπτομένη ευθεία** της καμπύλης c και η οποία είναι παράλληλη προς το $c'(t_0)$. Προφανώς η εφαπτόμενη ευθεία και καλά ορισμένη μόνο εφόσον $c'(t_0) \neq 0$. Αυτός είναι ο λόγος ο οποίος μας αναγκάζει να περιορίσουμε τη μελέτη μας σε κανονικές καμπύλες.

Έτσι η **εφαπτομένη ευθεία μιας κανονικής καμπύλης c** στο $t_0 \in I$ είναι εκείνη η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $c(t_0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα ταχύτητας $c'(t_0)$.

Αν c και \tilde{c} είναι γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες, δηλαδή ισχύει $\tilde{c} = T \circ c$ για κάποια ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$, και η καμπύλη c είναι κανονική, τότε και η καμπύλη \tilde{c} είναι επίσης κανονική, αφού έχουμε

$$\tilde{c}'(t) = T_*c'(t), \quad \text{για κάθε } t \in I,$$

όπου $T_* \in O(3)$ είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T .

Παράδειγμα 2.0.1. Η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση

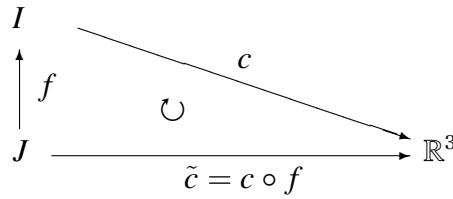
$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου $a > 0$ και $b \neq 0$ είναι κανονική. Η καμπύλη αυτή είναι γνωστή ως **κυλινδρική έλικα**. Η εικόνα της περιέχεται στον ορθό κυκλικό κύλινδρο με εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$.

2.1 Καμπυλότητα και στρέψη καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3

Όλα όσα αναφέραμε για αναπαραμετρήσεις, μήκος καμπυλών και μήκος τόξου καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 ισχύουν αυτούσια για καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 .

Πράγματι, έστω λεία καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παράμετρο $t \in I$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα. Θεωρούμε λεία συνάρτηση $f: J \rightarrow I$, με $f(\sigma) = t$, όπου $J \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα.



Η λεία καμπύλη $\tilde{c} = c \circ f$ έχει παράμετρο $\sigma \in J$ και εφαπτομενικό διάνυσμα

$$\tilde{c}' = \frac{d\tilde{c}}{d\sigma} = \frac{df}{d\sigma} \frac{dc}{dt} = \frac{df}{d\sigma} c'.$$

Η καμπύλη \tilde{c} είναι κανονική αν και μόνο αν η καμπύλη c είναι κανονική και ισχύει $df/d\sigma > 0$ παντού στο J , ή $df/d\sigma < 0$ παντού στο J . Σε αυτή την περίπτωση, η λεία καμπύλη $\tilde{c} = c \circ f$ καλείται **θεμιτή ή κανονική αναπαραμέτρηση** της καμπύλης c .

Δύο καμπύλες εκ των οποίων η μία είναι θεμιτή αναπαραμέτρηση της άλλης έχουν ακριβώς την ίδια εικόνα.

Το μήκος μιας καμπύλης $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, με παράμετρο $t \in I$, από το a έως το b , όπου $a < b$ και $a, b \in I$, είναι ο αριθμός

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Το μήκος τόξου της καμπύλης c με αφετηρία t_0 είναι εξ ορισμού η διαφορίσιμη συνάρτηση

$$s: I \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t \|c'(\sigma)\| d\sigma.$$

Σημειώνουμε ότι γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες του χώρου \mathbb{R}^3 έχουν την ίδια συνάρτηση μήκος τόξου με κοινή αφετηρία.

Όπως και για τις καμπύλες του \mathbb{R}^2 , έτσι και για καμπύλες του χώρου \mathbb{R}^3 είναι

$$\frac{ds}{dt} = \|c'\|.$$

Επιπλέον, ισχύει το ακόλουθο.

Πρόταση 2.1.1. Κάθε λεία κανονική καμπύλη του χώρου \mathbb{R}^3 μπορεί να αναπαραμετρηθεί ώστε να έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου. Μια καμπύλη του χώρου \mathbb{R}^3 έχει φυσική παράμετρο αν και μόνο το διάνυσμα ταχύτητάς της είναι μοναδιαίο παντού.

2.1.1 Καμυλότητα καμπυλών του \mathbb{R}^3

Ωστόσο, παρά τις ανωτέρω ομοιότητες, η πρώτη ουσιώδης διαφορά μεταξύ της θεωρίας των καμπυλών του χώρου \mathbb{R}^2 και της θεωρίας των καμπυλών του \mathbb{R}^3 αφορά στην έννοια της καμυλότητας.

Ακολούθως δίνεται ο ορισμός της καμυλότητας για καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 με φυσική παράμετρο, δηλαδή για καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου.

Ορισμός 2.1.1. Η καμυλότητα μιας C^2 καμπύλης $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, με φυσική παράμετρο $s \in I$, ορίζεται ως η συνεχής συνάρτηση $k: I \rightarrow [0, \infty)$ με

$$k(s) = \|\ddot{c}(s)\|, \quad s \in I.$$

Το διάνυσμα $\ddot{c}(s)$ καλείται διάνυσμα επιτάχυνσης της καμπύλης c στο $s \in I$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει $k(s) \geq 0$ για κάθε $s \in I$, σε αντίθεση με την καμυλότητα καμπυλών του \mathbb{R}^2 , η οποία ενδεχομένως λαμβάνει και αρνητικές τιμές.

Επιπλέον, αν ισχύει

$$k(s) = 0, \quad \text{για κάθε } s \in I,$$

τότε με ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$c(s) = p + sv,$$

όπου $p \in \mathbb{R}^3$ και v είναι μοναδιαίο διάνυσμα.

Τούτο αποδεικνύει ότι οι μόνες καμπύλες του χώρου \mathbb{R}^3 με φυσική παράμετρο και καμυλότητα $k = 0$ είναι οι ευθείες ή ευθύγραμμα τμήματα.

Σημειώνουμε ότι αν θεωρήσουμε την αναπαραμέτρηση $\bar{c} = c \circ f$ μια καμπύλης c , με φυσική παράμετρο s , όπου $f(s) = -s$, τότε και η καμπύλη \bar{c} έχει επίσης φυσική παράμετρο και καμυλότητα $\bar{k} = k$.

Είναι η καμπυλότητα γεωμετρική έννοια; Με άλλα λόγια πως σχετίζονται οι καμπυλότητες δύο γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 ;

Θεωρούμε καμπύλη c του χώρου \mathbb{R}^3 , με φυσική παράμετρο s . Κάθε γεωμετρικώς ισότιμη καμπύλη $\tilde{c} = T \circ c$ της c , με $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$, έχει επίσης την παράμετρο s ως φυσική παράμετρο. Επιπλέον, τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης των καμπυλών αυτών συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\dot{\tilde{c}} = T_* \dot{c} \quad \text{και} \quad \ddot{\tilde{c}} = T_* \ddot{c},$$

όπου $T_* \in O(3)$ είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T . Επομένως, για τις καμπυλότητες \tilde{k} και k των καμπυλών \tilde{c} και c , αντίστοιχα, έχουμε

$$\tilde{k} = \|\ddot{\tilde{c}}\| = \|T_* \ddot{c}\| = \|\ddot{c}\| = k.$$

Συνεπώς, αποδείξαμε την ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 2.1.2. *Γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , αμφότερες με φυσική παράμετρο, έχουν την ίδια καμπυλότητα.*

Ακολουθεί ο ορισμός της καμπυλότητας για κανονικές καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 με τυχούσα παράμετρο.

Θεωρούμε C^2 κανονική καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παράμετρο $t \in I$. Τότε η θεμιτή αναπαραμέτρηση $\bar{c} = c \circ f$ της καμπύλης c έχει φυσική παράμετρο, όπου $t = f(s)$ (ή πιο απλά $t = t(s)$) είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης μήκους τόξου $s = s(t)$.

Αν \bar{k} είναι η καμπυλότητα της καμπύλης \bar{c} , όπως ορίστηκε πιο πάνω, τότε ορίζουμε ως **καμπυλότητα της καμπύλης $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$** , με παράμετρο $t \in I$, τη συνάρτηση $k: I \rightarrow [0, \infty)$ με

$$k = \bar{k} \circ s,$$

ή ισοδύναμα

$$k(t) = \bar{k}(s(t)), \quad t \in I.$$

Με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\dot{c} = \frac{dt}{ds} \frac{dc}{dt} = \frac{dt}{ds} c', \quad (2.1)$$

και

$$\ddot{c} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c'' + \frac{d^2t}{ds^2} c'. \quad (2.2)$$

Επειδή το εφαπτόμενο διάνυσμα \dot{c} είναι μοναδιαίο, με παραγωγήιση της σταθερής συνάρτησης $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$ λαμβάνουμε

$$\langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 0.$$

Οπότε, κάνοντας χρήση της ταυτότητα του Lagrange, έχουμε

$$\begin{aligned} k &= \|\ddot{c}\| = \|\dot{c} \times \ddot{c}\| \\ &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \|c' \times c''\|. \end{aligned}$$

Επομένως, με χρήση της ισότητας

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|} \quad (2.3)$$

και των ανωτέρω σχέσεων, προκύπτει η ακόλουθη πρόταση, η οποία μας δίνει ένα τρόπο υπολογισμού της καμπυλότητας κανονικών καμπυλών του χώρου \mathbb{R}^3 με τυχούσα παράμετρο.

Πρόταση 2.1.3. Η καμπυλότητα k μιας C^2 κανονικής καμπύλης $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, με παράμετρο $t \in I$, είναι η συνάρτηση

$$k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}.$$

Έτσι εύκολα διαπιστώνεται ότι η καμπύλη του Παραδείγματος 2.0.1 έχει σταθερή καμπυλότητα

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Προκύπτει το συμπέρασμα ότι, σε αντίθεση με τις καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 , δεν αρκεί η καμπυλότητα για να καθοριστεί, ως προς γεωμετρική ισοτιμία, μια καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 . Πράγματι, η ανωτέρω κυλινδρική έλικα έχει την ίδια καμπυλότητα με ένα κύκλο ακτίνας $(a^2 + b^2)/a$, χωρίς προφανώς να είναι γεωμετρικώς ισοτιμες καμπύλες.

2.1.2 Πλαίσιο Frenet, στρέψη και εξισώσεις Frenet για καμπύλες του \mathbb{R}^3

Έστω C^3 καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$. Ονομάζουμε μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα της καμπύλης c στο $s \in I$ το διάνυσμα $\vec{t}(s)$ με

$$\vec{t}(s) = \dot{c}(s), \quad s \in I.$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\dot{\vec{t}}(s)$ είναι κάθετο στο $\vec{t}(s)$, αφού έχουμε ότι

$$\langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{t}(s) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η καμπυλότητα της καμπύλης c είναι παντού θετική, τότε ορίζουμε το κύριο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}(s)$ της καμπύλης c στο $s \in I$ ως το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{n}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{k(s)} = \frac{\ddot{c}(s)}{k(s)}, \quad s \in I.$$

Από εδώ και στο εξής, θα μελετούμε μόνο εκείνες τις κανονικές καμπύλες του χώρου \mathbb{R}^3 οι οποίες έχουν καμπυλότητα θετική παντού, δηλαδή $k(s) > 0$ για κάθε $s \in I$. Έχουμε τότε την ακόλουθη εξίσωση, γνωστή ως πρώτη εξίσωση Frenet,

$$\dot{\vec{t}} = k\vec{n}.$$

Ορισμός 2.1.2. Το δεύτερο κάθετο διάνυσμα $\vec{b}(s)$ μιας λείας καμπύλης του χώρου \mathbb{R}^3 , με φυσική παράμετρο $s \in I$ και παντού θετική καμπυλότητα, είναι το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s).$$

Είναι φανερό ότι τα διανύσματα $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ συνιστούν, για κάθε $s \in I$, μια ορθομοναδιαία και δεξιόστροφη βάση του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , το λεγόμενο πλαίσιο Frenet της καμπύλης.

Για τις παραγώγους του πλαισίου Frenet έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{\vec{t}}(s) &= \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{t}(s) \rangle \vec{t}(s) + \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s) + \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s), \\ \dot{\vec{n}}(s) &= \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{t}(s) \rangle \vec{t}(s) + \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s) + \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s), \\ \dot{\vec{b}}(s) &= \langle \dot{\vec{b}}(s), \vec{t}(s) \rangle \vec{t}(s) + \langle \dot{\vec{b}}(s), \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s) + \langle \dot{\vec{b}}(s), \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s),\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\dot{\vec{t}}(s) &= k(s)\vec{n}(s), \\ \dot{\vec{n}}(s) &= -k(s)\vec{t}(s) + \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s), \\ \dot{\vec{b}}(s) &= -\langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s) \rangle \vec{n}(s).\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε τη στρέψη καμπύλης. Πρόκειται για μια σημαντική συνάρτηση για την θεωρία των καμπυλών του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 . Αρχικά δίνουμε τον ορισμό για καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου.

Ορισμός 2.1.3. Η στρέψη μιας C^3 καμπύλης $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, με φυσική παράμετρο $s \in I$ και παντού θετική καμπυλότητα, είναι η συνάρτηση $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\tau(s) = \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s) \rangle, \quad s \in I.$$

Από τα ανωτέρω προκύπτουν οι λεγόμενες εξισώσεις Frenet της καμπύλης c , δηλαδή οι ακόλουθες εξισώσεις

$$\dot{\vec{t}} = k\vec{n}, \quad (2.4)$$

$$\dot{\vec{n}} = -k\vec{t} + \tau\vec{b}, \quad (2.5)$$

$$\dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n}. \quad (2.6)$$

Η στρέψη μιας καμπύλης μπορεί να υπολογιστεί, χωρίς να απαιτείται γνώση του πλαισίου Frenet. Πράγματι, επειδή είναι

$$\dot{\vec{n}} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\ddot{c}}{k} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k} \right) \ddot{c} + \frac{1}{k} \ddot{c}$$

και

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{1}{k} \dot{c} \times \ddot{c},$$

έχουμε

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{c}]}{k^2} = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{c}]}{\|\ddot{c}\|^2}.$$

Ακολούθως, δίνουμε τον ορισμό της στρέψης για κανονικές καμπύλες με τυχούσα παράμετρο.

Θεωρούμε κανονική καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παράμετρο $t \in I$ και καμπυλότητα k παντού θετική. Τότε η θεμιτή αναπαραμέτρηση $\bar{c} = c \circ f$ της καμπύλης c έχει φυσική παράμετρο, όπου $t = f(s)$ (ή πιο απλά $t = t(s)$) είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης μήκους τόξου $s = s(t)$.

Αν \bar{t} είναι η στρέψη της καμπύλης \bar{c} όπως ορίστηκε πιο πάνω, τότε ορίζουμε ως **στρέψη της καμπύλης** $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, με παράμετρο $t \in I$, τη συνάρτηση $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\tau = \bar{t} \circ s$$

ή ισοδύναμα

$$\tau(t) = \bar{t}(s(t)), \quad t \in I.$$

Αναλόγως ορίζεται το πλαίσιο Frenet.

Από την ισότητα (2.2) βρίσκουμε ότι

$$\ddot{c} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c''' + 3\frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} c'' + \frac{d^3t}{ds^3} c'. \quad (2.7)$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (2.3), (2.1), (2.2) και (2.7), καταλήγουμε στον ακόλουθο τρόπο υπολογισμού της στρέψης μιας κανονικής καμπύλης του χώρου \mathbb{R}^3 με τυχούσα παράμετρο και παντού θετική καμπυλότητα.

Πρόταση 2.1.4. Η στρέψη μιας C^3 κανονικής καμπύλης $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, με παράμετρο $t \in I$ και παντού θετική καμπυλότητα k , είναι η συνάρτηση

$$\tau = \frac{[c', c'', c''']}{\|c' \times c''\|^2}.$$

2.1. ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΤΡΕΨΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{R}^3

Επιπλέον, προκύπτει εύκολα από τις σχέσεις (2.1) και (2.2) ότι το πλαίσιο Frenet μιας κανονικής καμπύλης, με τυχούσα παράμετρο και παντού θετική καμπυλότητα, είναι

$$\vec{t} = \frac{c'}{\|c'\|}, \quad \vec{b} = \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}.$$

Λόγω της Πρότασης 2.1.4, εύκολα υπολογίζεται ότι η στρέψη της κυλινδρικής έλικας του Παραδείγματος 2.0.1 είναι

$$\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Παρατήρηση 2.1.1. Σημειώνουμε ότι αν μια καμπύλη c έχει παράμετρο το μήκος τόξου s και στρέψη τ , τότε η αναπαραμέτρηση $\tilde{c} = c \circ f$ της καμπύλης c με $f(s) = -s$ έχει επίσης φυσική παράμετρο και στρέψη $\tilde{\tau} = \tau$.

Είναι η στρέψη γεωμετρική έννοια; Η απάντηση δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.1.5. Έστω λεία κανονική καμπύλη c του χώρου \mathbb{R}^3 , με παντού θετική καμπυλότητα και στρέψη τ . Η στρέψη $\tilde{\tau}$ της καμπύλης $\tilde{c} = T \circ c$, όπου $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$, είναι

$$\tilde{\tau} = \varepsilon\tau,$$

όπου $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$ αν η ισομετρία T διατηρεί, ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη c (άρα και η καμπύλη \tilde{c}) έχει παράμετρο το μήκος τόξου. Προφανώς ισχύει

$$\dot{\tilde{c}} = T_*\dot{c}, \quad \ddot{\tilde{c}} = T_*\ddot{c} \quad \text{και} \quad \ddot{\tilde{c}} = T_*\ddot{c},$$

όπου $T_* \in O(3)$ είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T .

Από την Πρόταση 2.1.2, γνωρίζουμε ότι οι καμπυλότητες των γεωμετρικώς ισότιμων καμπυλών c και \tilde{c} είναι $\tilde{k} = k$. Κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.1.4, έχουμε

$$\tilde{\tau} = \frac{[\dot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}}]}{\tilde{k}^2} = \frac{[T_*\dot{c}, T_*\ddot{c}, T_*\ddot{\tilde{c}}]}{k^2}.$$

Λόγω της Πρότασης Α'.2.4(v), λαμβάνουμε

$$[T_*\dot{c}, T_*\ddot{c}, T_*\ddot{\tilde{c}}] = \varepsilon [\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\tilde{c}}],$$

όπου $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$, αν η ισομετρία T διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό, αντίστοιχα, από όπου προκύπτει το ζητούμενο. \square

2.2 Το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3

Θεώρημα 2.2.1. (i) (Υπαρξη) Για κάθε ζεύγος λείων συναρτήσεων $k, \tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ με $k(s) > 0$ για κάθε $s \in I \subseteq \mathbb{R}$, υπάρχει λεία καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$, της οποίας η καμπυλότητα και η στρέψη είναι οι δοθείσες συναρτήσεις k και τ , αντίστοιχα.

(ii) (Μοναδικότητα) Έστω λεία καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$, καμπυλότητα k παντού θετική και στρέψη τ . Αν $\tilde{c}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια άλλη καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$, καμπυλότητα $\tilde{k} = k$ και στρέψη¹ $\tilde{\tau} = \tau$, τότε υπάρχει ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$, η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, τέτοια ώστε $\tilde{c} = T \circ c$, δηλαδή οι καμπύλες c και \tilde{c} είναι γεωμετρικώς ισότιμες.

Απόδειξη. (i) Έστω $\{v_1, v_2, v_3\}$ μια ορθομοναδιαία και δεξιόστροφη βάση του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 . Θεωρούμε το σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \dot{X}_1(s) = k(s)X_2(s) \\ \dot{X}_2(s) = -k(s)X_1(s) + \tau(s)X_3(s), & s \in I, \\ \dot{X}_3(s) = -\tau(s)X_2(s) \end{cases}$$

¹Είναι προφανές ότι στην περίπτωση όπου ισχύει $\tilde{k} = k$ και $\tilde{\tau} = -\tau$, τότε υπάρχει ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ η οποία αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τέτοια ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.

2.2. ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{R}^3

με αγνώστους τις διανυσματικές συναρτήσεις $X_1(s), X_2(s), X_3(s)$ και αρχικές συνθήκες

$$X_1(s_0) = v_1, X_2(s_0) = v_2, X_3(s_0) = v_3,$$

για κάποιο $s_0 \in I$.

Το γραμμικό αυτό σύστημα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1(s) \\ \dot{X}_2(s) \\ \dot{X}_3(s) \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{pmatrix},$$

όπου $A(s)$ είναι ο αντισυμμετρικός πίνακας

$$A(s) = (a_{ij}(s)) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, το οποίο αφορά στην ύπαρξη λύσεων γραμμικών συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων με αρχικές συνθήκες, υπάρχει μοναδική λεία λύση

$$\{X_1(s), X_2(s), X_3(s)\}$$

η οποία ορίζεται για κάθε $s \in I$.

Θα αποδείξουμε ότι τα διανύσματα

$$\{X_1(s), X_2(s), X_3(s)\}$$

αποτελούν ορθομοναδιαία και δεξιόστροφη βάση του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^3 για κάθε $s \in I$.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τις λείες συναρτήσεις $f_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_{ij}(s) = \langle X_i(s), X_j(s) \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad s \in I.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι λύσεις του γραμμικού προβλήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{df_{ij}}{ds} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} f_{kj} + \sum_{k=1}^3 a_{jk} f_{ik}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

με αρχικές συνθήκες

$$f_{ij}(s_0) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Επειδή ο πίνακας $A(s)$ είναι αντισυμμετρικός, άμεσα διαπιστώνεται ότι οι συναρτήσεις δ_{ij} είναι επίσης λύση του ανωτέρω προβλήματος. Λόγω μοναδικότητας της λύσης, βρίσκουμε ότι

$$f_{ij}(s) = \delta_{ij}, \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα

$$\{X_1(s), X_2(s), X_3(s)\}$$

συνιστούν ορθομοναδιαία βάση του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^3 για κάθε $s \in I$.

Για να αποδείξουμε ότι είναι δεξιόστροφη βάση, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για την παράγωγο του μικτού γινομένου ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [X_1(s), X_2(s), X_3(s)] &= [\dot{X}_1(s), X_2(s), X_3(s)] \\ &+ [X_1(s), \dot{X}_2(s), X_3(s)] \\ &+ [X_1(s), X_2(s), \dot{X}_3(s)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Τότε είναι

$$\begin{aligned} [X_1(s), X_2(s), X_3(s)] &= [X_1(s_0), X_2(s_0), X_3(s_0)] \\ &= [v_1, v_2, v_3] = 1, \end{aligned}$$

αφού η βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^3 είναι ορθομοναδιαία και δεξιόστροφη.

Στη συνέχεια, θεωρούμε την καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$c(s) = \int_{s_0}^s X_1(\sigma) d\sigma.$$

Το εφαπτομενικό της διάνυσμα είναι μοναδιαίο, αφού ισχύει

$$\frac{dc}{ds}(s) = X_1(s), \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

2.2. ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{R}^3

Επομένως η παράμετρος $s \in I$ είναι μήκος τόξου για την καμπύλη c , το X_1 είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό της διάνυσμα και η καμπυλότητά της είναι προφανώς η δοθείσα συνάρτηση k . Επιπλέον, το πλαίσιο Frenet της καμπύλης c είναι η ορθομοναδιαία δεξιόστροφη βάση

$$\{X_1(s), X_2(s), X_3(s)\}$$

και επομένως η στρέψη της είναι η δοθείσα συνάρτηση τ .

(ii) Έστω

$$\{E_1(s) = \vec{t}(s), E_2(s) = \vec{n}(s), E_3(s) = \vec{b}(s)\}$$

και

$$\{\tilde{E}_1(s), \tilde{E}_2(s), \tilde{E}_3(s)\}$$

τα πλαίσια Frenet των καμπυλών c και \tilde{c} , αντίστοιχα. Επιλέγουμε $s_0 \in I$ και $A \in O(3)$ με $\det A = 1$ τέτοια ώστε

$$A\tilde{E}_1(s_0) = E_1(s_0), A\tilde{E}_2(s_0) = E_2(s_0), A\tilde{E}_3(s_0) = E_3(s_0).$$

Θεωρούμε τις παράλληλες μεταφορές T_v κατά το διάνυσμα $v = c(s_0)$ και T_w κατά το διάνυσμα $w = -\tilde{c}(s_0)$.

Στη συνέχεια ορίζουμε την καμπύλη

$$\bar{c} = T \circ \tilde{c},$$

όπου $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι η ισομετρία

$$T = T_v \circ A \circ T_w.$$

Η καμπύλη \bar{c} προφανώς έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου s . Επιπλέον, λόγω των Προτάσεων 2.1.2 και 2.1.5, η καμπύλη \bar{c} έχει καμπυλότητα $\bar{k} = k$ και στρέψη $\bar{\tau} = \tau$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\bar{c}(s_0) = c(s_0)$$

και ότι το πλαίσιο Frenet

$$\{\bar{E}_1(s), \bar{E}_2(s), \bar{E}_3(s)\}$$

της καμπύλης \bar{c} πληροί

$$\bar{E}_1(s_0) = E_1(s_0), \bar{E}_2(s_0) = E_2(s_0), \bar{E}_3(s_0) = E_3(s_0).$$

Επειδή

$$\{E_1(s), E_2(s), E_3(s)\}$$

και

$$\{\bar{E}_1(s), \bar{E}_2(s), \bar{E}_3(s)\}$$

πληρούν τις εξισώσεις Frenet, είναι λύσεις του ίδιου γραμμικού συστήματος με τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Λόγω μοναδικότητας της λύσης έχουμε ότι

$$\bar{E}_1(s) = E_1(s), \bar{E}_2(s) = E_2(s), \bar{E}_3(s) = E_3(s), \text{ για κάθε } s \in I.$$

Τότε όμως είναι

$$\frac{dc}{ds}(s) = \frac{d\bar{c}}{ds}(s), \text{ για κάθε } s \in I.$$

Επειδή $\bar{c}(s_0) = c(s_0)$, τελικώς βρίσκουμε ότι

$$\bar{c}(s) = c(s), \text{ για κάθε } s \in I.$$

Συνεπώς είναι $\tilde{c} = T^{-1} \circ c$ και η T^{-1} είναι ισομετρία η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό. \square

2.3 Επίπεδες καμπύλες

Ορισμός 2.3.1. Μια καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 καλείται *επίπεδη*, αν η εικόνα της περιέχεται σε ένα επίπεδο του \mathbb{R}^3 .

Στην ακόλουθη πρόταση, όπου δίνεται ένας χαρακτηρισμός των επιπέδων καμπυλών, γίνεται εμφανής η γεωμετρική ερμηνεία της στρέψης ως μέτρο απόκλισης από το να είναι μια καμπύλη επίπεδη.

Πρόταση 2.3.1. Μια λεία κανονική καμπύλη του χώρου \mathbb{R}^3 , με καμυλότητα παντού θετική, είναι επίπεδη αν και μόνο αν η στρέψη της είναι μηδέν παντού.

Απόδειξη. Έστω καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$, και καμπυλότητα παντού θετική.

Υποθέτουμε ότι η στρέψη της είναι μηδέν παντού. Από την εξίσωση Frenet (2.6), συμπεραίνουμε ότι η διανυσματική απεικόνιση $\vec{b}(s)$ είναι σταθερή, δηλαδή το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης είναι $\vec{b}(s) = w$ για κάθε $s \in I$, όπου w είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Τότε έχουμε

$$\frac{d}{ds} \langle c(s), w \rangle = 0,$$

για κάθε $s \in I$. Συνεπώς υπάρχει σταθερά $a \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\langle c(s), w \rangle = a, \text{ για κάθε } s \in I.$$

Τούτο σημαίνει ότι η εικόνα της καμπύλης c περιέχεται σε επίπεδο το οποίο είναι ορθογώνιο στο μοναδιαίο διάνυσμα w .

Αντίστροφα, αν η εικόνα της καμπύλης c περιέχεται σε επίπεδο το οποίο είναι ορθογώνιο σε μοναδιαίο διάνυσμα w , τότε ισχύει

$$\langle c(s), w \rangle = a, \text{ για κάθε } s \in I,$$

όπου a είναι μια σταθερά. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$\langle \dot{c}(s), w \rangle = 0 \text{ και } \langle \ddot{c}(s), w \rangle = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\langle \vec{t}(s), w \rangle = 0 \text{ και } \langle \vec{n}(s), w \rangle = 0.$$

Τότε όμως το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης c είναι

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) = \pm w,$$

δηλαδή ανεξάρτητο του s . Επομένως, από την εξίσωση (2.6) λαμβάνουμε $\tau(s) = 0$ για κάθε $s \in I$. \square

2.4 Καμπύλες σταθερής κλίσης

Ορισμός 2.4.1. Μια κανονική καμπύλη c του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 καλείται καμπύλη σταθερής κλίσης, αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία με κάθε εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης c .

Με άλλα λόγια, μια καμπύλη είναι καμπύλη σταθερής κλίσης αν υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα w τέτοιο ώστε το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα \vec{t} της καμπύλης να πληροί παντού τη σχέση

$$\langle \vec{t}, w \rangle = \cos \varphi,$$

όπου φ είναι η σταθερή γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα w με κάθε εφαπτομένη ευθεία.

Το διάνυσμα w συχνά αναφέρεται ως η **διεύθυνση** της καμπύλης σταθερής κλίσης, ενώ η σταθερή γωνία φ ως **κλίση** της.

Οι επίπεδες καμπύλες καθώς και οι κυλινδρικές έλικες είναι καμπύλες σταθερής κλίσης (ποιά είναι η διεύθυνση και ποιά η κλίση τους;).

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας δίνει ένα χαρακτηρισμό για τις καμπύλες σταθερής κλίσης μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης.

Θεώρημα 2.4.1. Μια λεία κανονική καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , με παντού θετική καμπυλότητα k και στρέψη τ , είναι καμπύλη σταθερής κλίσης αν και μόνο αν η συνάρτηση τ/k είναι σταθερή.

Απόδειξη. Έστω λεία καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$, παντού θετική καμπυλότητα k και στρέψη τ .

Υποθέτουμε ότι η καμπύλη c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα w τέτοιο ώστε

$$\langle \vec{t}, w \rangle = \cos \varphi,$$

όπου φ σταθερή γωνία.

Παραγωγίζοντας και κάνοντας χρήση της πρώτης εξίσωσης Frenet, λαμβάνουμε

$$\langle \vec{n}, w \rangle = 0.$$

Επομένως είναι

$$w = \langle w, \vec{t} \rangle \vec{t} + \langle w, \vec{b} \rangle \vec{b},$$

ή ισοδύναμα

$$w = \cos \varphi \vec{t} + \sin \varphi \vec{b}.$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω και κάνοντας χρήση της πρώτης και τρίτης εξίσωσης Frenet, βρίσκουμε ότι

$$\frac{\tau}{k} = \cot \varphi.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση τ/k είναι σταθερή. Επιλέγουμε σταθερή γωνία φ έτσι ώστε

$$\boxed{\frac{\tau}{k} = \cot \varphi.} \quad (2.8)$$

Θεωρούμε τη λεία διανυσματική απεικόνιση $W: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$W(s) = \cos \varphi \vec{t}(s) + \sin \varphi \vec{b}(s), \quad s \in I.$$

Με τη βοήθεια των εξισώσεων Frenet και της ισότητας (2.8), προκύπτει ότι

$$\frac{dW}{ds}(s) = 0,$$

για κάθε $s \in I$. Επομένως, η διανυσματική συνάρτηση $W(s) = w$ είναι σταθερή. Προφανώς ισχύει

$$\langle \vec{t}, w \rangle = \cos \varphi,$$

το οποίο σημαίνει ότι η καμπύλη c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης, με διεύθυνση w και κλίση η οποία δίνεται από την ισότητα (2.8). \square

2.5 Σφαιρικές καμπύλες

Ορισμός 2.5.1. Μια καμπύλη του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 καλείται σφαιρική αν η εικόνα της περιέχεται σε μια σφαίρα.

Θεωρούμε λεία σφαιρική καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$, της οποίας η εικόνα περιέχεται σε σφαίρα κέντρου p_0 και ακτίνας $R > 0$. Τότε ισχύει

$$\langle c(s) - p_0, c(s) - p_0 \rangle = R^2, \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές λαμβάνουμε

$$\langle c(s) - p_0, \dot{c}(s) \rangle = 0 \text{ και } \langle c(s) - p_0, \ddot{c}(s) \rangle = -1. \quad (2.9)$$

Η δεύτερη από τις ανωτέρω σχέσεις δείχνει ότι η καμπυλότητα της καμπύλης c είναι παντού θετική.

Επιπλέον, με τη βοήθεια της πρώτης ισότητας στην (2.9), προκύπτει ότι

$$c(s) - p_0 = \langle c(s) - p_0, \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s) + \langle c(s) - p_0, \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s) \quad (2.10)$$

και επομένως

$$\langle c(s) - p_0, \vec{n}(s) \rangle^2 + \langle c(s) - p_0, \vec{b}(s) \rangle^2 = R^2,$$

για κάθε $s \in I$.

Κάνοντας χρήση του Λήμματος 1.5.1, προκύπτει ότι υπάρχει λεία γωνιακή συνάρτηση $\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\langle c(s) - p_0, \vec{n}(s) \rangle = R \cos \omega(s)$$

και

$$\langle c(s) - p_0, \vec{b}(s) \rangle = R \sin \omega(s),$$

για κάθε $s \in I$.

Τότε η δεύτερη από τις εξισώσεις (2.9) δίνει

$$\boxed{k(s) = -\frac{1}{R \cos \omega(s)}}. \quad (2.11)$$

Είναι φανερό ότι ισχύει

$$k(s) \geq \frac{1}{R}, \text{ για κάθε } s \in I.$$

Επιπλέον η σχέση (2.10) γίνεται

$$c(s) - p_0 = R \left(\cos \omega(s) \vec{n}(s) + \sin \omega(s) \vec{b}(s) \right).$$

Παραγωγίζοντας και κάνοντας χρήση των εξισώσεων Frenet, βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\tau(s) = -\dot{\omega}(s)}. \quad (2.12)$$

Ως συνέπεια των ανωτέρω λαμβάνουμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 2.5.1. *Οι μόνες λείες και κανονικές σφαιρικές καμπύλες του χώρου \mathbb{R}^3 με σταθερή καμπυλότητα είναι τόξα κύκλων.*

Απόδειξη. Από τις ισότητες (2.11) και (2.12) προκύπτει ότι η στρέψη είναι $\tau = 0$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.1, η καμπύλη είναι επίπεδη. Συνεπώς η καμπύλη είναι τόξο κύκλου. \square

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, υπό την υπόθεση ότι η στρέψη δεν μηδενίζεται πουθενά, από την ισότητα (2.11) με παραγωγή και λαμβάνοντας υπόψη την ισότητα (2.12), λαμβάνουμε

$$\frac{\dot{k}}{k^2\tau} = R \sin \omega.$$

Παραγωγίζοντας και κάνοντας και πάλι χρήση των (2.11) και (2.12) προκύπτει ότι

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau} \right) = \frac{\tau}{k}. \quad (2.13)$$

Συμπεραίνουμε ότι η ανωτέρω είναι μια συνθήκη αναγκαία για να είναι μια καμπύλη σφαιρική.

Το ερώτημα που εύλογα τίθεται τώρα είναι κατά πόσο η συνθήκη (2.13) χαρακτηρίζει τις σφαιρικές καμπύλες. Η απάντηση δίνεται ακολούθως.

Πρόταση 2.5.2. *Μια λεία κανονική καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , με καμπυλότητα παντού θετική και στρέψη που δε μηδενίζεται πουθενά, είναι σφαιρική αν και μόνο αν πληρείται η συνθήκη (2.13).*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το αντίστροφο. Θεωρούμε τη λεία διανυσματική απεικόνιση $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$\alpha = c + \frac{1}{k} \vec{n} - \frac{\dot{k}}{k^2\tau} \vec{b}.$$

Κάνοντας χρήση της συνθήκης (2.13) και των εξισώσεων Frenet, εύκολα προκύπτει ότι

$$\dot{\alpha}(s) = 0, \quad \text{για κάθε } s \in I.$$

Επομένως η διανυσματική απεικόνιση α είναι σταθερή, έστω $\alpha(s) = p_0$. Όμως είναι φανερό ότι ισχύει

$$\|c - p_0\| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^2}.$$

Ξανά κάνοντας χρήση της συνθήκης (2.13), βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k^2} + \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^2\right) = 0.$$

Από αυτή συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{k^2} + \left(\frac{\dot{k}}{k^2\tau}\right)^2$ είναι σταθερή και επομένως η καμπύλη c είναι σφαιρική. \square

2.6 Ασκήσεις

1. Δίνεται η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (t - \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t + \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (i) Εξετάστε αν η καμπύλη c είναι κανονική καμπύλη. Βρείτε τη συνάρτηση μήκους τόξου της με αφετηρία $t_0 = 0$.
- (ii) Βρείτε αναπαραμέτρησή της με παράμετρο το μήκος τόξου.
- (iii) Υπολογίστε την καμπυλότητα και τη στρέψη της ως συνάρτηση της παραμέτρου t , αλλά και του μήκους τόξου.
- (iv) Υπολογίστε το πλαίσιο Frenet συναρτήσει της παραμέτρου t , αλλά και συναρτήσει του μήκους τόξου.

2. Δίνεται η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, f(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου $a \neq 0$ είναι πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί η λεία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε η καμπύλη c να είναι επίπεδη.

2.6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3. Δίνεται η καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι είναι καμπύλη σταθερής κλίσης και να βρεθεί σταθερό διάνυσμα (δηλαδή η διεύθυνσή της) το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία με όλες τις εφαπτόμενες ευθείες της καμπύλης c .

4. Καμπύλη $c(s)$ του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in \mathbb{R}$, έχει παντού θετική καμπυλότητα και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

$$\vec{n}(s) = (\sin s, 0, \cos s).$$

Να αποδειχθεί ότι έχει σταθερή καμπυλότητα και σταθερή στρέψη. Να βρεθεί η καμπύλη c αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c(0) = (0, 0, 0) \quad \text{και} \quad \vec{t}(0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

5. Να αποδειχθεί ότι οι καμπύλες $c, \bar{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παραμετρικές παραστάσεις

$$c(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t - \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\bar{c}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, -2t), \quad t \in \mathbb{R}$$

είναι γεωμετρικώς ισοτίμες.

6. Αποδείξτε ότι αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες μιας κανονικής καμπύλης του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι τμήμα ευθείας.
7. Αποδείξτε ότι αν όλα τα κάθετα επίπεδα² μιας κανονικής καμπύλης του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 με καμπυλότητα παντού θετική διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι σφαιρική.

²Το κάθετο επίπεδο μιας λείας καμπύλης $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$ και καμπυλότητα παντού θετική, είναι το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο $c(s)$ της καμπύλης και είναι ορθογώνιο στο εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{t}(s)$.

8. Αποδείξτε ότι αν όλα τα επίπεδα προσκολλήσεως³ μιας κανονικής καμπύλης του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 με καμυλότητα παντού θετική διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι επίπεδη.
9. Αποδείξτε ότι οι μόνες κανονικές καμπύλες του χώρου \mathbb{R}^3 των οποίων όλες οι εφαπτόμενες ευθείες είναι παράλληλες προς σταθερό διάνυσμα είναι οι ευθείες.

³Το επίπεδο προσκολλήσεως μιας λείας καμπύλης $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$ και καμυλότητα παντού θετική, είναι το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο $c(s)$ της καμπύλης και είναι ορθογώνιο στο δεύτερο κάθετο διάνυσμα $\vec{b}(s)$.

Κεφάλαιο 3

Επιφάνειες

3.1 Κανονικές Επιφάνειες

Στόχος της παρούσας ενότητας είναι να εισάγουμε την έννοια της κανονικής επιφάνειας. Οι κανονικές επιφάνειες, σε αντίθεση με τις καμπύλες, ορίζονται ως υποσύνολα σημείων του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι παραμετρημένα τμήματα του επιπέδου κατάλληλα συγκολλημένα, χωρίς αυτοτομές ώστε να είναι εφικτός ο ορισμός εφαπτομένου επιπέδου σε κάθε σημείο. Προκύπτει ότι οι κανονικές επιφάνειες είναι εκείνα τα διδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , επί των οποίων μπορούμε να μεταφέρουμε θεμελιώδεις έννοιες και αποτελέσματα του διαφορικού λογισμού.

Ορισμός 3.1.1. Ένα μη κενό υποσύνολο $S \subset \mathbb{R}^3$ καλείται **κανονική επιφάνεια**, αν για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 με $p \in V$ και απεικόνιση

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S,$$

η οποία είναι επί, με

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 , τέτοια ώστε:

(i) Η απεικόνιση X είναι λεία, δηλαδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων συντεταγμένων της $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ έως κάποιας τάξης¹ και είναι συνεχείς στο U .

(ii) Η απεικόνιση

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$$

είναι ομοιομορφισμός (δηλαδή αντιστρέφεται και η αντίστροφή της $X^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ είναι συνεχής).

(iii) Για κάθε $q \in U$, το διαφορικό της απεικόνισης X στο σημείο q

$$dX_q: T_q\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{X(q)}\mathbb{R}^3$$

είναι 1-1.

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο $T_p\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n με αφετηρία το σημείο p . Το σύνολο αυτό καθίσταται κατά φυσικό τρόπο n -διάστατος διανυσματικός χώρος με τη συνήθη πρόσθεση διανυσμάτων και το συνήθη βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Ο διανυσματικός αυτός χώρος είναι ισόμορφος με τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n μέσω παράλληλης μεταφοράς (βλέπε Παράρτημα).

Κάθε απεικόνιση

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$$

που πληροί τις ιδιότητες του Ορισμού 3.1.1 ονομάζεται **παραμέτρηση** ή **σύστημα συντεταγμένων** της κανονικής επιφάνειας S . Το σύνολο $X(U) = V \cap S$, το οποίο είναι ανοικτό² στην επιφάνεια S , καλείται **περιοχή συντεταγμένων** του συστήματος συντεταγμένων X . Οι μεταβλητές $(u, v) \in U$ καλούνται **συντεταγμένες** ή **παράμετροι** του συστήματος συντεταγμένων. Αν για σημείο $p \in V \cap S$ είναι $p = X(u, v)$, τότε το ζεύγος (u, v) καλούνται **συντεταγμένες του σημείου p ως προς το σύστημα συντεταγμένων X** .

¹Συνήθως η κλάση διαφορισιμότητας C^3 είναι αρκετή για τις ανάγκες της θεωρίας μας.

²Ένα υποσύνολο A της επιφάνειας S καλείται ανοικτό στην S αν γράφεται ως $A = S \cap V$, όπου V είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 .

3.1. ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Αν $\{e_1, e_2\}$ και $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ είναι οι συνήθεις βάσεις των Ευκλειδείων χώρων \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3 αντίστοιχα, τότε ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$$

στο σημείο $q = (u, v) \in U$ είναι ο πίνακας

$$\text{Jac } X(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} dX_q(e_1) &= X_u(q) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)), \\ dX_q(e_2) &= X_v(q) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)). \end{aligned}$$

Επομένως, η συνθήκη στον Ορισμό 3.1.1 των κανονικών επιφανειών ότι το διαφορικό $dX_q: T_q\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{X(q)}\mathbb{R}^3$ είναι 1-1 είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$\text{rank}(\text{Jac } X(q)) = 2,$$

ή ισοδύναμα

$$X_u(q) \times X_v(q) \neq (0, 0, 0), \text{ για κάθε } q \in U.$$

Από τον Ορισμό 3.1.1, άμεσα προκύπτει ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο κανονικής επιφάνειας S καθίσταται κατά φυσικό τρόπο κανονική επιφάνεια.

Επιπλέον, αν S είναι κανονική επιφάνεια και $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι ισομετρία, τότε και το υποσύνολο $\tilde{S} = T(S)$ του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 είναι επίσης κανονική επιφάνεια. Πράγματι, εύκολα διαπιστώνεται ότι αν

$$X: U \rightarrow V \cap S$$

είναι σύστημα συντεταγμένων της κανονικής επιφάνειας S , τότε η απεικόνιση

$$\tilde{X} = T \circ X: U \rightarrow T(V) \cap \tilde{S}$$

είναι σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας $\tilde{S} = T(S)$. Αυτό σημαίνει ότι η γεωμετρική ισοτιμία έχει έννοια μεταξύ κανονικών επιφανειών.

Παραθέτουμε στη συνέχεια παραδείγματα κανονικών επιφανειών.

Παράδειγμα 3.1.1. Δοθείσης τυχούσας λείας συνάρτησης

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 , θεωρούμε το γράφημα Γ_f της συνάρτησης f , ως προς το επίπεδο συντεταγμένων Oxy , δηλαδή το σύνολο

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο Γ_f είναι κανονική επιφάνεια. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση

$$X: U \rightarrow \Gamma_f,$$

με

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in U.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η απεικόνιση X πληροί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) του Ορισμού 3.1.1, όπου $V = \mathbb{R}^3$.

Αξίζει να τονίζουμε ότι αυτή η κανονική επιφάνεια καλύπτεται από ένα μόνο σύστημα συντεταγμένων. Αναλόγως μπορούμε να ορίσουμε γραφήματα συναρτήσεων ως προς τα επίπεδα συντεταγμένων Oxz ή Oyz . Έτσι έχουμε ως συνέπεια ότι κάθε επίπεδο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 είναι κανονική επιφάνεια.

Παράδειγμα 3.1.2. Η μοναδιαία σφαίρα

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

είναι κανονική επιφάνεια. Αφήνεται ως άσκηση να διαπιστωθεί ότι οι ακόλουθες απεικονίσεις

$$X_i: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_i \cap \mathbb{S}^2, \quad i = 1, \dots, 6, \quad U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

με

$$\begin{aligned} X_1(u, v) &= (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}), & V_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}, \\ X_2(u, v) &= (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2}), & V_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}, \\ X_3(u, v) &= (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v), & V_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}, \\ X_4(u, v) &= (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v), & V_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y < 0\}, \\ X_5(u, v) &= (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), & V_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}, \\ X_6(u, v) &= (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v), & V_6 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0\} \end{aligned}$$

πληρούν τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) του Ορισμού 3.1.1. Επιπλέον ισχύει

$$X_1(U) \cup \dots \cup X_6(U) = \mathbb{S}^2.$$

Παράδειγμα 3.1.3. Ένας άλλος τρόπος για να αποδείξουμε ότι η μοναδιαία σφαίρα \mathbb{S}^2 είναι κανονική επιφάνεια είναι ο ακόλουθος. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$X: U \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus C$$

με

$$X(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \quad (\varphi, \theta) \in U = (0, 2\pi) \times (0, \pi),$$

όπου C είναι το ημικύκλιο

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : y = 0 \text{ και } x \geq 0\}.$$

Η απεικόνιση X είναι προφανώς λεία και μάλιστα ισχύει

$$\|X_\varphi(\varphi, \theta) \times X_\theta(\varphi, \theta)\|^2 = \sin^2 \theta > 0.$$

Επιπλέον η απεικόνιση $X: U \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus V$ είναι ομοιομορφισμός (γιατί;) όπου

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \text{ και } x \geq 0\}.$$

Οι παράμετροι (φ, θ) είναι γνωστές ως **γεωγραφικό μήκος** και **γεωγραφικό πλάτος**, αντίστοιχα. Στρέφοντας κατάλληλα τη συνήθη βάση του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , μπορούμε να ορίσουμε παρόμοιο σύστημα συντεταγμένων το οποίο να καλύπτει το ημικύκλιο C , παραλείποντας όμως κάποιο άλλο ημικύκλιο το οποίο περιέχεται στην περιοχή συντεταγμένων $\mathbb{S}^2 \setminus C$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, αποδεικνύεται ότι η σφαίρα \mathbb{S}^2 είναι κανονική επιφάνεια, η οποία μάλιστα καλύπτεται από δύο μόνο συστήματα συντεταγμένων.

Μια μέθοδος κατασκευής κανονικών επιφανειών δίνεται από το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.1. Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό υποσύνολο U του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 και $a \in f(U)$. Αν το σύνολο

$$f^{-1}(a) = \{p \in U : f(p) = a\}$$

δεν περιέχει κρίσιμα³ σημεία της συνάρτησης f , τότε είναι κανονική επιφάνεια.

Απόδειξη. Θεωρούμε σημείο $p_0 \in f^{-1}(a)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $f_z(p_0) \neq 0$. Οι περιπτώσεις $f_x(p_0) \neq 0$ ή $f_y(p_0) \neq 0$ αντιμετωπίζονται ανάλογα. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)), \quad (x, y, z) \in U.$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης F στο σημείο p_0 είναι

$$\text{Jac } F(p_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(p_0) & f_y(p_0) & f_z(p_0) \end{pmatrix}.$$

Επειδή $\det \text{Jac } F(p_0) = f_z(p_0) \neq 0$, από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης, γνωρίζουμε ότι υπάρχει περιοχή V του σημείου

³Τα κρίσιμα σημεία μιας λείας συνάρτησης f είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζονται και οι τρεις μερικές της παράγωγοι.

3.1. ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

p_0 και περιοχή W του σημείου $F(p_0)$, τέτοιες ώστε ο περιορισμός $F|_V: V \rightarrow W$ να είναι διαφορομορφισμός. Με άλλα λόγια το σύστημα των εξισώσεων

$$x = u, \quad y = v, \quad t = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V$$

με αγνώστους x, y, z έχει μοναδική λύση

$$u = x, \quad v = y, \quad z = g(u, v, t), \quad (u, v, t) \in W,$$

όπου g είναι λεία συνάρτηση. Είναι φανερό ότι το σύνολο $f^{-1}(a) \cap V$ είναι γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης h όπου

$$h(u, v) = g(u, v, a),$$

αφού τα σημεία του συνόλου $f^{-1}(a) \cap V$ είναι της μορφής $(u, v, h(u, v))$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Παράδειγμα 3.1.4. Η σφαίρα

$$\mathbb{S}_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας $R > 0$ είναι κανονική επιφάνεια. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$$

τότε έχουμε ότι $\mathbb{S}_R^2 = f^{-1}(0)$.

Το μοναδικό κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f είναι το $(0, 0, 0)$, το οποίο δεν ανήκει στη σφαίρα $\mathbb{S}_R^2 = f^{-1}(0)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.1, η σφαίρα \mathbb{S}_R^2 είναι κανονική επιφάνεια.

Παράδειγμα 3.1.5. Ο ορθός κυκλικός κύλινδρος

$$C_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

ακτίνας $r > 0$ είναι κανονική επιφάνεια. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2,$$

τότε έχουμε ότι $C_r = f^{-1}(0)$.

Το σύνολο των κρίσιμων σημείων της συνάρτησης f είναι ο άξονας Oz , του οποίου κανένα σημείο δεν ανήκει στον κύλινδρο $C_r = f^{-1}(0)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.1, ο κύλινδρος C_r είναι κανονική επιφάνεια.

Παράδειγμα 3.1.6. Το δίχωνο υπερβολοειδές

$$\Sigma_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = r^2\},$$

όπου $r > 0$, είναι κανονική επιφάνεια. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - r^2,$$

τότε έχουμε ότι $\Sigma_r = f^{-1}(0)$.

Το μοναδικό κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f είναι το $(0, 0, 0)$, το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο $\Sigma_r = f^{-1}(0)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.1, το δίχωνο υπερβολοειδές Σ_r είναι κανονική επιφάνεια.

Από τα ανωτέρω παραδείγματα, μόνο στο Παράδειγμα 3.1.6 η κανονική επιφάνεια που λαμβάνουμε δεν είναι τροχιακά συνεκτική. Πράγματι, αν το δίχωνο υπερβολοειδές Σ_r ήταν τροχιακά συνεκτικό, τότε για σημεία $p_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \Sigma_r$ με $z_1 < 0$ και $p_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \Sigma_r$ με $z_2 > 0$ θα υπήρχε συνεχής καμπύλη

$$c: [0, 1] \rightarrow \Sigma_r \text{ με } c(0) = p_1 \text{ και } c(1) = p_2.$$

Αν θέσουμε

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

τότε από το Θεώρημα Bolzano θα υπήρχε $t_0 \in (0, 1)$ με $z(t_0) = 0$, πράγμα αδύνατο.

Σημειώνουμε ότι κάθε τροχιακά συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 είναι και συνεκτικό. Το αντίστροφο δεν είναι αληθές εν γένει. Αναφέρουμε όμως ότι για κανονικές επιφάνειες, οι έννοιες συνεκτικότητα και τροχιακή συνεκτικότητα είναι ισοδύναμες. Πράγματι, ισχύει η ακόλουθη πρόταση, την οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 3.1.2. Μια κανονική επιφάνεια S είναι συνεκτική αν και μόνο αν είναι τροχιακά συνεκτική.

Από εδώ και στο εξής, θα υποθέτουμε ότι κάθε κανονική επιφάνεια είναι συνεκτική, αφού σε διαφορετική περίπτωση εξετάζουμε την κάθε συνεκτική συνιστώσα ως μια ξεχωριστή επιφάνεια.

Η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι κάθε κανονική επιφάνεια είναι τοπικά γράφημα.

Πρόταση 3.1.3. Για κάθε σημείο p κανονικής επιφάνειας S υπάρχει περιοχή V του σημείου p στην S , η οποία είναι γράφημα ως προς ένα από τα τρία επίπεδα συντεταγμένων Oxy , Oxz ή Oyz .

Απόδειξη. Προκύπτει από το λήμμα που ακολουθεί. \square

Λήμμα 3.1.4. Έστω σημείο p_0 κανονικής επιφάνειας S και απεικόνιση

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \text{ με } p_0 = X(q_0) \in X(U),$$

η οποία πληροί τις συνθήκες (i) και (iii) του Ορισμού 3.1.1.

(i) Τότε, υπάρχει περιοχή $U_0 \subseteq U$ του σημείου q_0 και ανοικτό υποσύνολο W του \mathbb{R}^2 , τέτοια ώστε η απεικόνιση

$$\pi \circ X|_{U_0}: U_0 \rightarrow W$$

να είναι διαφορομορφισμός, όπου $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι μία από τις τρεις προβολές⁴ του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^2 .

(ii) Αν επιπλέον η απεικόνιση X είναι 1-1, τότε η αντίστροφη της X^{-1} είναι συνεχής.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι για την απεικόνιση

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

ισχύει

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q_0) \neq 0.$$

⁴ Δηλαδή, η απεικόνιση π είναι μία από τις απεικονίσεις $\pi_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, με $\pi_1(x, y, z) = (x, y)$, $\pi_2(x, y, z) = (x, z)$ και $\pi_3(x, y, z) = (y, z)$.

Τότε η απεικόνιση $\pi_1 \circ X: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Αντίστροφης Απεικόνισης και από αυτό προκύπτει το σκέλος (i). Το σκέλος (ii) προκύπτει παρατηρώντας ότι

$$(X|_{U_0})^{-1} = (\pi_1 \circ X|_{U_0})^{-1} \circ \pi_1|_{X(U_0)}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Πρόταση 3.1.5. Έστω κανονική επιφάνεια S και

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S, \quad \tilde{X}: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

είναι δύο συστήματα συντεταγμένων αυτής για τα οποία ισχύει $W := X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U}) \neq \emptyset$. Τότε η απεικόνιση

$$\tilde{X}^{-1} \circ X: X^{-1}(W) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{X}^{-1}(W) \subseteq \mathbb{R}^2$$

είναι διαφορομορφισμός.

Απόδειξη. Θεωρούμε σημείο $q_0 \in X^{-1}(W)$, καθώς και την εικόνα του $\tilde{q}_0 = \tilde{X}^{-1}(X(q_0)) \in \tilde{X}^{-1}(W)$ μέσω της απεικόνισης $\tilde{X}^{-1} \circ X$.

Κάνοντας χρήση του Λήμματος 3.1.4, έχουμε ότι σε κατάλληλη περιοχή $\tilde{U}_0 \subseteq \tilde{X}^{-1}(W)$ του σημείου \tilde{q}_0 , ο περιορισμός $(\pi \circ \tilde{X})|_{\tilde{U}_0}$ είναι διαφορομορφισμός επί ανοικτού υποσυνόλου του \mathbb{R}^2 . Η απεικόνιση $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι μία από τις τρεις προβολές του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 στον \mathbb{R}^2 .

Είναι φανερό ότι το ανοικτό υποσύνολο $U_0 = (X \circ \tilde{X}^{-1})(\tilde{U}_0) \subseteq X^{-1}(W)$ είναι περιοχή του σημείου q_0 . Τότε, σε αυτή την περιοχή είναι

$$(\tilde{X}^{-1} \circ X)|_{U_0} = ((\pi \circ \tilde{X})|_{\tilde{U}_0})^{-1} \circ (\pi \circ X)|_{U_0}.$$

Από τη τελευταία ισότητα έπεται ότι η απεικόνιση $(\tilde{X}^{-1} \circ X)|_{U_0}$ είναι διαφορίσιμη, ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. Επειδή το σημείο $q_0 \in X^{-1}(W)$ είναι τυχαίο, είναι φανερό ότι η απεικόνιση $\tilde{X}^{-1} \circ X$ είναι διαφορίσιμη σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της $X^{-1}(W)$. Ομοίως προκύπτει ότι η απεικόνιση $X^{-1} \circ \tilde{X}$ είναι διαφορίσιμη, δηλαδή η απεικόνιση $\tilde{X}^{-1} \circ X$ είναι διαφορομορφισμός. \square

3.2 Διαφορίσιμες απεικονίσεις

Ορισμός 3.2.1. Έστω S κανονική επιφάνεια και V ανοικτό υποσύνολο της S .

(i) Μια συνάρτηση $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται **διαφορίσιμη στο σημείο** $p \in V$, αν για κάποιο σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \quad \text{με} \quad p \in X(U) \subseteq V,$$

η συνάρτηση $f \circ X: U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $X^{-1}(p)$. Η συνάρτηση f καλείται **διαφορίσιμη στο σύνολο** V , αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου V .

(ii) Μια απεικόνιση

$$F: V \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{με} \quad F = (f_1, f_2, f_3)$$

καλείται **διαφορίσιμη** αν κάθε μία από τις συναρτήσεις συντεταγμένων της $f_i: V \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$, είναι διαφορίσιμη συνάρτηση.

Ας σημειωθεί ότι ο ανωτέρω ορισμός είναι καλός, δηλαδή ανεξάρτητος της επιλογής του συστήματος συντεταγμένων. Πράγματι, αν $\tilde{X}: U \rightarrow S$ είναι άλλο ένα σύστημα συντεταγμένων με $p \in \tilde{X}(U) \subseteq V$, τότε λόγω της Πρότασης 3.1.5, η συνάρτηση

$$f \circ \tilde{X} = (f \circ X) \circ (X^{-1} \circ \tilde{X})$$

είναι διαφορίσιμη, ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων.

Παρατήρηση 3.2.1. Έστω $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση, όπου W είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 . Αν S είναι κανονική επιφάνεια και ισχύει $S \subset W$, τότε ο περιορισμός $f|_S: S \rightarrow \mathbb{R}$ είναι προφανώς διαφορίσιμη συνάρτηση.

Ορισμός 3.2.2. Έστω S, \tilde{S} κανονικές επιφάνειες και V ανοικτό υποσύνολο της S .

(i) Μια συνεχής απεικόνιση $F: V \subseteq S \rightarrow \tilde{S}$ καλείται **διαφορίσιμη στο σημείο** $p \in V$, αν για συστήματα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \quad \text{με} \quad p \in X(U) \subseteq V$$

και

$$\tilde{X}: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S} \text{ με } F(X(U)) \subseteq \tilde{X}(\tilde{U})$$

η απεικόνιση

$$\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $X^{-1}(p)$. Η απεικόνιση F καλείται **διαφορίσιμη στο σύνολο V** , αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου V .

(ii) Η απεικόνιση F καλείται **διαφορομορφισμός** αν είναι διαφορίσιμη, 1-1, επί και η αντίστροφή της F^{-1} είναι διαφορίσιμη.

Ο ανωτέρω ορισμός είναι επίσης καλός, δηλαδή ανεξάρτητος της επιλογής των συστημάτων συντεταγμένων. Πράγματι, αν

$$X_1: U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \text{ και } \tilde{X}_1: \tilde{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S}$$

είναι συστήματα συντεταγμένων των επιφανειών S και \tilde{S} αντίστοιχα με

$$p \in X_1(U_1) \subseteq V \text{ και } F(X_1(U_1)) \subseteq \tilde{X}_1(\tilde{U}_1),$$

τότε λόγω της Πρότασης 3.1.5, η απεικόνιση

$$\tilde{X}_1^{-1} \circ F \circ X_1 = (\tilde{X}_1^{-1} \circ \tilde{X}) \circ (\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X) \circ (X^{-1} \circ X_1)$$

είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι αν

$$F: S_1 \rightarrow S_2 \text{ και } G: S_2 \rightarrow S_3$$

είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ των κανονικών επιφανειών S_1, S_2 και S_3 , τότε η σύνθεση

$$G \circ F: S_1 \rightarrow S_3$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Είναι φανερό ότι κάθε διαφορομορφισμός μεταξύ κανονικών επιφανειών είναι και ομοιομορφισμός.

Παρατήρηση 3.2.2. Από την Πρόταση 3.1.5 προκύπτει άμεσα ότι αν

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$$

είναι σύστημα συντεταγμένων μια κανονικής επιφάνειας S , τότε η απεικόνιση X είναι διαφορομορφισμός ως απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών $U \subseteq \mathbb{R}^2$ και $V \cap S$.

Παρατήρηση 3.2.3. Έστω $F: W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ λεία απεικόνιση, όπου W είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 . Αν S και \tilde{S} είναι κανονικές επιφάνειες τέτοιες ώστε $S \subset W$ και $F(S) \subseteq \tilde{S}$, τότε ο περιορισμός $F|_S: S \rightarrow \tilde{S}$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

3.3 Εφαπτόμενα διανύσματα και Εφαπτόμενο επίπεδο κανονικής επιφάνειας

Ορισμός 3.3.1. Έστω S κανονική επιφάνεια και σημείο $p \in S$. Ένα διάνυσμα $w \in T_p\mathbb{R}^3$ καλείται **εφαπτόμενο διάνυσμα της κανονικής επιφάνειας S στο σημείο της p** , αν υπάρχει λεία επιφανειακή καμπύλη

$$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S,$$

όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε

$$c(0) = p \text{ και } c'(0) = w.$$

Το σύνολο όλων των εφαπτομένων διανυσμάτων της κανονικής επιφάνειας S στο σημείο της p συμβολίζεται με το σύμβολο T_pS . Προφανώς ισχύει

$$T_pS \subset T_p\mathbb{R}^3,$$

όπου $T_p\mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα διανύσματα του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 με αφετηρία το σημείο p . Θυμίζουμε ότι το σύνολο $T_p\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 3, με πράξεις τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης διανυσμάτων και βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει πληροφορίες για τη δομή του συνόλου T_pS .

Πρόταση 3.3.1. Έστω S κανονική επιφάνεια και p τυχόν σημείο της. Αν $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι σύστημα συντεταγμένων με $p = X(q) \in X(U)$, τότε ισχύει

$$T_p S = dX_q(T_q \mathbb{R}^2).$$

Απόδειξη. Έστω $w \in T_p S$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.3.1, υπάρχει επιφανειακή καμπύλη

$$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U),$$

όπου $\varepsilon > 0$ είναι αρκούντως μικρό, τέτοια ώστε

$$c(0) = p \text{ και } c'(0) = w.$$

Θεωρούμε την καμπύλη $\beta = X^{-1} \circ c$, της οποίας η εικόνα περιέχεται στο ανοικτό σύνολο U . Λόγω της Παρατήρησης 3.2.2, η καμπύλη β είναι λεία. Τότε είναι

$$w = c'(0) = (X \circ \beta)'(0) = dX_q(\beta'(0)),$$

και επομένως ισχύει

$$T_p S \subseteq dX_q(T_q \mathbb{R}^2).$$

Αντίστροφα, έστω $w = dX_q(w_0) \in dX_q(T_q \mathbb{R}^2)$. Θεωρούμε καμπύλη

$$\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U,$$

όπου $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε

$$\beta(0) = X^{-1}(p) \text{ και } \beta'(0) = w_0.$$

Τότε η επιφανειακή καμπύλη

$$c = X \circ \beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U)$$

πληροί

$$c(0) = p \text{ και } c'(0) = (X \circ \beta)'(0) = dX_q(w_0).$$

Άρα ισχύει

$$dX_q(T_q \mathbb{R}^2) \subseteq T_p S.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Από την Πρόταση 3.3.1, λαμβάνοντας υπόψη το σκέλος (iii) του Ορισμού 3.1.1, προκύπτει ότι το σύνολο $T_p S$ είναι διδιάστατος διανυσματικός υπόχωρος του 3-διάστατου διανυσματικού χώρου $T_p \mathbb{R}^3$. Από εδώ και στο εξής, ο διανυσματικός χώρος $T_p S$ θα ονομάζεται **εφαπτόμενο επίπεδο της κανονικής επιφάνειας S στο σημείο της p** .

Είναι προφανές ότι τα διανύσματα $X_u(q), X_v(q)$ ανήκουν στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_p S$, όπου $p = X(q)$, αφού είναι αντίστοιχα τα διανύσματα ταχύτητας των επιφανειακών καμπύλων c_1 και c_2 με

$$c_1(t) = X(t, v_0), \quad c_2(t) = X(u_0, t),$$

όπου $q = (u_0, v_0)$.

Οι καμπύλες αυτές καλούνται **παραμετρικές καμπύλες** $v = v_0$ και $u = u_0$, αντίστοιχα, ως προς το σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S.$$

Λόγω του σκέλους (iii) του Ορισμού 3.1.1, προκύπτει ότι τα διανύσματα $X_u(q), X_v(q)$ **απαρτίζουν μια βάση του εφαπτομένου επιπέδου $T_p S$** .

Στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.1, θέτοντας

$$\beta(t) = (u(t), v(t)),$$

έχουμε ότι

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας, βρίσκουμε ότι

$$w = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q).$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του εφαπτομένου διανύσματος $w \in T_p S$ ως προς τη βάση $\{X_u(q), X_v(q)\}$ του εφαπτομένου επιπέδου $T_p S$ είναι οι αριθμοί $u'(0), v'(0)$. Είναι αυτονόητο ότι οι συντεταγμένες του τυχόντος εφαπτομένου διανύσματος εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων της κανονικής επιφάνειας.

3.4 Διαφορικό διαφορίσιμων απεικόνιστων μεταξύ κανονικών επιφανειών

Ορισμός 3.4.1. Έστω $F: S \rightarrow \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και \tilde{S} . Ονομάζουμε διαφορικό της F στο σημείο $p \in S$ την απεικόνιση

$$dF_p: T_p S \rightarrow T_{F(p)} \tilde{S}$$

με

$$dF_p(w) = (F \circ c)'(0)$$

όπου $w \in T_p S$ και

$$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S,$$

με $\varepsilon > 0$, είναι καμπύλη της κανονικής επιφάνειας S με

$$c(0) = p \text{ και } c'(0) = w.$$

Είναι ο ανωτέρω ορισμός καλός, δηλαδή ανεξάρτητος της επιλογής της επιφανειακής καμπύλης c ; Για να το εξετάσουμε αυτό, θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας S

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \text{ με } p \in X(U)$$

και παραμέτρους (u, v) . Επιπλέον, θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας \tilde{S}

$$\tilde{X}: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S}$$

με παραμέτρους (\tilde{u}, \tilde{v}) τέτοιο ώστε $F(X(U)) \subseteq \tilde{X}(\tilde{U})$. Η απεικόνιση

$$\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

είναι διαφορίσιμη με

$$\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)).$$

Λόγω συνέχειας, για $\varepsilon > 0$ αρκούντως μικρό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εικόνα της καμπύλης c περιέχεται στη περιοχή συντεταγμένων $X(U)$. Επομένως για την καμπύλη c έχουμε την ακόλουθη παραμετρική παράσταση

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

3.4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΣΜΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

όπου $u(t), v(t)$ είναι λείες συναρτήσεις.

Η εικόνα της καμπύλης $\tilde{c} = F \circ c$ περιέχεται στη περιοχή συντεταγμένων $\tilde{X}(\tilde{U})$, και επομένως γράφεται στη μορφή

$$\tilde{c}(t) = \tilde{X}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

όπου $\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)$ είναι λείες συναρτήσεις. Επειδή είναι

$$\tilde{c}(t) = F \circ c(t) = F \circ X(u(t), v(t)),$$

λαμβάνουμε ότι

$$(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = \tilde{X}^{-1} \circ F \circ X(u(t), v(t)) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t))).$$

Συνεπώς, με χρήση του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(0) &= u'(0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u(0), v(0)) + v'(0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u(0), v(0)), \\ \tilde{v}'(0) &= u'(0) \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u(0), v(0)) + v'(0) \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u(0), v(0)). \end{aligned}$$

Επειδή τα διανύσματα ταχύτητας των επιφανειακών καμπυλών c και \tilde{c} δίνονται αντίστοιχα από τις ισότητες

$$\begin{aligned} \tilde{c}'(0) &= \tilde{u}'(0) \tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) + \tilde{v}'(0) \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)), \\ c'(0) &= u'(0) X_u(u(0), v(0)) + v'(0) X_v(u(0), v(0)), \end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \tilde{c}'(0) &= \left(u'(0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u(0), v(0)) + v'(0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u(0), v(0)) \right) \tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) \\ &+ \left(u'(0) \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u(0), v(0)) + v'(0) \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u(0), v(0)) \right) \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)). \end{aligned}$$

Αυτό δηλώνει ότι το διάνυσμα $(F \circ c)'(0) = \tilde{c}'(0)$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής της επιφανειακής καμπύλης c . Επιπλέον το διάνυσμα $(F \circ c)'(0)$ εξαρτάται γραμμικά από τις συντεταγμένες $(u'(0), v'(0))$ του διανύσματος $w = c'(0)$ ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ του εφαπτομένου επιπέδου $T_p S$ της επιφάνειας S . Αποδείξαμε επομένως την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.4.1. Έστω $F: S \rightarrow \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και \tilde{S} . Για κάθε σημείο $p \in S$, το διαφορικό

$$dF_p: T_p S \rightarrow T_{F(p)} \tilde{S}$$

της F στο p είναι γραμμική απεικόνιση.

Σημειώνουμε ότι ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας για διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ κανονικών επιφανειών. Πράγματι, εύκολα διαπιστώνεται ότι αν

$$F: S_1 \rightarrow S_2 \text{ και } G: S_2 \rightarrow S_3$$

είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ των κανονικών επιφανειών S_1, S_2 και S_3 , τότε η σύνθεση

$$G \circ F: S_1 \rightarrow S_3$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση και μάλιστα για κάθε σημείο $p \in S_1$ ισχύει

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

Το διαφορικό διαφορίσιμων συναρτήσεων ορισμένων επί κανονικών επιφανειών ορίζεται με ανάλογο τρόπο.

Ορισμός 3.4.2. Έστω $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και p σημείο της κανονικής επιφάνειας S . Ονομάζουμε **διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο p** την απεικόνιση

$$df_p: T_p S \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$$

με

$$df_p(w) = (f \circ c)'(0)$$

όπου $w \in T_p S$ και

$$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, \varepsilon > 0,$$

είναι καμπύλη της S με

$$c(0) = p \text{ και } c'(0) = w.$$

3.4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΣΜΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Προκύπτει εύκολα ότι το διαφορικό $df_p: T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ είναι καλά ορισμένο και επιπλέον είναι γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα 3.4.1. Για κάθε κανονική επιφάνεια S και διάνυσμα $e \in \mathbb{R}^3$, θεωρούμε τη **συνάρτηση ύψους** $h: S \rightarrow \mathbb{R}$ ως προς το e , η οποία ορίζεται ως

$$h(p) = \langle p, e \rangle, \quad p \in S.$$

Η συνάρτηση h είναι διαφορίσιμη αφού, για κάθε σύστημα συντεταγμένων $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, η σύνθεση $h \circ X = \langle X, e \rangle$ είναι προφανώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Το διαφορικό της συνάρτησης h στο τυχόν σημείο $p \in S$ και για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pS$ είναι

$$dh_p(w) = (h \circ c)'(0),$$

όπου $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, \varepsilon > 0$, είναι καμπύλη της S με

$$c(0) = p \quad \text{και} \quad c'(0) = w.$$

Επομένως, βρίσκουμε ότι

$$dh_p(w) = \langle c'(0), e \rangle,$$

ή ισοδύναμα

$$dh_p(w) = \langle w, e \rangle.$$

Θα χρειαστούμε στη συνέχεια την ακόλουθη πρόταση η οποία αποτελεί γενίκευση γνωστής πρότασης της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Πρόταση 3.4.2. Έστω S συνεκτική κανονική επιφάνεια και $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση. Αν ισχύει

$$df_p = 0, \quad \text{για κάθε } p \in S,$$

τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Απόδειξη. Έστω $X: U \rightarrow S$ σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας, με παραμέτρους $(u, v) \in U$, όπου U είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 . Από την υπόθεση έχουμε

$$df_{X(u,v)}X_u(u, v) = df_{X(u,v)}X_v(u, v) = 0, \quad \text{για κάθε } (u, v) \in U,$$

ή ισοδύναμα,

$$(f \circ X)_u(u, v) = (f \circ X)_v(u, v) = 0, \text{ για κάθε } (u, v) \in U.$$

Επειδή το σύνολο U είναι συνεκτικό, συνάγουμε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στην περιοχή συντεταγμένων $X(U)$. Με άλλα λόγια, αποδείξαμε ότι κάθε σημείο της επιφάνειας S έχει περιοχή στην S επί της οποίας η συνάρτηση f είναι σταθερή. Επομένως, η συνάρτηση f είναι τοπικά σταθερή.

Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή σε ολόκληρη την επιφάνεια S . Θεωρούμε τυχόντα σημεία $p, q \in S$. Λόγω της Πρότασης 3.1.2, υπάρχει συνεχής καμπύλη $c: [0, 1] \rightarrow S$ τέτοια ώστε $c(0) = p$ και $c(1) = q$. Επειδή η συνάρτηση f είναι τοπικά σταθερή, για κάθε $t \in [0, 1]$ υπάρχει ανοικτή περιοχή V_t του σημείου $c(t)$ στην επιφάνεια S επί της οποίας η συνάρτηση f είναι σταθερή με τιμή $a_t = f|_{V_t}$. Προφανώς ισχύει

$$c([0, 1]) \subseteq \cup_{t \in [0, 1]} V_t.$$

Επειδή το σύνολο $c([0, 1])$ είναι συμπαγές, ως εικόνα συμπαγούς συνόλου μέσω της συνεχούς καμπύλης c , έχουμε ότι

$$c([0, 1]) \subseteq V_{t_0} \cup \dots \cup V_{t_m}$$

για πεπερασμένο πλήθος αριθμών $t_0 < \dots < t_m$ με $t_0 = 0$ και $t_m = 1$. Τότε, επειδή είναι

$$V_{t_i} \cap V_{t_{i+1}} \neq \emptyset, \quad i = 0, \dots, m-1,$$

λαμβάνουμε

$$f(p) = a_{t_0} = \dots = a_{t_m} = f(q).$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι σταθερή. \square

Μπορούμε να ορίσουμε το διαφορικό για κάθε λεία απεικόνιση

$$F: S \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ με } F = (f, g, h),$$

της οποίας το πεδίο ορισμού είναι μια κανονική επιφάνεια S και f, g, h είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων της. Πράγματι, το διαφορικό της απεικόνισης F στο τυχόν σημείο $p \in S$ ορίζεται να είναι η γραμμική απεικόνιση

$$dF_p: T_p S \rightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^3$$

με

$$dF_p = (df_p, dg_p, dh_p),$$

όπου

$$df_p, dg_p, dh_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι τα διαφορικά των συναρτήσεων συντεταγμένων της απεικόνισης F στο σημείο p .

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.4.2 είναι το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πόρισμα 3.4.3. Έστω S συνεκτική κανονική επιφάνεια και $F: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι λεία απεικόνιση. Αν ισχύει

$$dF_p = 0, \text{ για κάθε } p \in S,$$

τότε η απεικόνιση F είναι σταθερή.

Το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης επεκτείνεται ως ακολούθως και για διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ επιφανειών.

Θεώρημα 3.4.4. Έστω $F: S \rightarrow \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και \tilde{S} , τέτοια ώστε για σημείο $p \in S$ το διαφορικό της

$$dF_p: T_p S \rightarrow T_{F(p)} \tilde{S}$$

είναι ισομορφισμός. Τότε, υπάρχει περιοχή V του σημείου p στην επιφάνεια S και περιοχή W του σημείου $F(p)$ στην επιφάνεια \tilde{S} τέτοιες ώστε, ο περιορισμός $F|_V: V \rightarrow W$ να αντιστρέφεται και η αντίστροφή της $(F|_V)^{-1}: W \rightarrow V$ να είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, δηλαδή η $F|_V: V \rightarrow W$ είναι διαφορομορφισμός.

3.5 Κανονικές Παραμετρικές Επιφάνειες

Ορίσαμε τις κανονικές επιφάνειες ως κατάλληλα υποσύνολα σημείων του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 . Συχνά είναι χρήσιμο να ορίσουμε, κατ' αναλογία με τις κανονικές καμπύλες, τις κανονικές παραμετρικές επιφάνειες ως κατάλληλες απεικονίσεις. Ο ορισμός αυτός είναι χρήσιμος κυρίως για την τοπική θεωρία των επιφανειών.

Ορισμός 3.5.1. Μια παραμετρική επιφάνεια είναι κάθε λεία απεικόνιση

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ με } X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U,$$

όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Η απεικόνιση X καλείται κανονική παραμετρική επιφάνεια αν επιπλέον ισχύει

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) \neq (0, 0, 0), \text{ για κάθε } (u, v) \in U.$$

Το σύνολο $X(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ ονομάζεται **εικόνα** της παραμετρικής επιφάνειας X . Επισημαίνουμε ότι δύο παραμετρικές επιφάνειες ενδέχεται να είναι διαφορετικές ακόμα και αν έχουν την ίδια ακριβώς εικόνα.

Η γεωμετρική ισοτιμία ορίζεται και για παραμετρικές επιφάνειες. Η παραμετρική επιφάνεια

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

καλείται **γεωμετρικώς ισότιμη** της παραμετρικής επιφάνειας

$$\tilde{X}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

αν και μόνο αν υπάρχει ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ τέτοια ώστε

$$\tilde{X} = T \circ X.$$

Είναι φανερό (γιατί;) πως αν η παραμετρική επιφάνεια X είναι κανονική, τότε και κάθε άλλη παραμετρική επιφάνεια γεωμετρικώς ισότιμη προς την X είναι επίσης κανονική. Τούτο σημαίνει ότι η γεωμετρική ισοτιμία έχει νόημα μεταξύ κανονικών παραμετρικών επιφανειών.

3.5. ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Η ακόλουθη πρόταση συσχετίζει την έννοια των κανονικών επιφανειών με αυτή των κανονικών παραμετρικών επιφανειών. Ουσιαστικά επιτρέπει όλες οι έννοιες οι οποίες έχουν οριστεί ή που θα ορισθούν στη συνέχεια για κανονικές επιφάνειες να μπορούν, για τους σκοπούς της τοπικής θεωρίας, να εισαχθούν και για τις κανονικές παραμετρικές επιφάνειες.

Πρόταση 3.5.1. Έστω $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ κανονική παραμετρική επιφάνεια. Για κάθε σημείο $q_0 \in U$ υπάρχει περιοχή $U_0 \subseteq U$ του σημείου q_0 τέτοια ώστε το σύνολο $X(U_0)$ να είναι κανονική επιφάνεια.

Απόδειξη. Επειδή είναι

$$X_u(q) \times X_v(q) = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(q), -\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(q), \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \right) \neq (0, 0, 0),$$

για κάθε $q \in U$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q_0) \neq 0.$$

Τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης για την απεικόνιση

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)),$$

προκύπτει ότι υπάρχει περιοχή $U_0 \subseteq U$ του σημείου q_0 τέτοια ώστε το σύστημα

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

με αγνώστους $(u, v) \in U_0$ να έχει μοναδική και λεία λύση

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Συνεπώς για $(u, v) \in U_0$ έχουμε

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (x, y, f(x, y)),$$

όπου f είναι η λεία συνάρτηση με

$$f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)).$$

Τούτο σημαίνει ότι το σύνολο $X(U_0)$ είναι γράφημα λείας συνάρτησης, ως προς το επίπεδο συντεταγμένων Oxy , και επομένως είναι κανονική επιφάνεια. \square

Παράδειγμα 3.5.1 (Εκ περιστροφής επιφάνειες). Θεωρούμε κανονική καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (f(t), 0, g(t)), \quad t \in I,$$

τέτοια ώστε $f(t) > 0$ για κάθε $t \in I$. Προφανώς, η εικόνα της περιέχεται στο επίπεδο συντεταγμένων Oxz .

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η παραμετρική επιφάνεια

$$X: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t)), \quad (t, \theta) \in I \times \mathbb{R},$$

είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια.

Η εικόνα της είναι η εκ περιστροφής επιφάνεια, η οποία παράγεται από περιστροφή της εικόνας της καμπύλης c γύρω από τον άξονα Oz .

Οι παραμετρικές καμπύλες $X(t, \theta = \theta_0)$ ονομάζονται **μεσημβρινοί**, ενώ οι παραμετρικές καμπύλες $X(t = t_0, \theta)$ είναι κύκλοι, οι οποίοι περιέχονται σε επίπεδα κάθετα στον άξονα περιστροφής Oz , και ονομάζονται **παράλληλοι** της εκ περιστροφής επιφάνειας.

3.6 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι, για κάθε $r > 0$, το σύνολο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = r^2\}$$

είναι κανονική επιφάνεια. Βρείτε ένα σύστημα συντεταγμένων της γύρω από κάθε σημείο της.

2. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τις κρίσιμες τιμές της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2.$$

3.6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για ποιές τιμές της σταθεράς $a \in \mathbb{R}$ είναι το σύνολο $f^{-1}(a)$ κανονική επιφάνεια; Να εξετάσετε τα ίδια ερωτήματα στην περίπτωση όπου $f(x, y, z) = x^2yz$.

3. Αποδείξτε ότι το ελλειψοειδές

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

είναι κανονική επιφάνεια, όπου a, b, c είναι θετικοί αριθμοί. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση

$$X: (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

με

$$X(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u), \quad (u, v) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

είναι σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας S . Περιγράψτε γεωμετρικά τις παραμετρικές καμπύλες $X(u = u_0, v)$.

4. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$$

είναι κανονική επιφάνεια και βρείτε ένα σύστημα συντεταγμένων της.

5. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2\}$$

δεν είναι κανονική επιφάνεια.

6. Είναι η απεικόνιση $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$X(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

κανονική παραμετρική επιφάνεια;

7. Έστω καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$, καμπυλότητα $k(s) > 0$ για κάθε $s \in I$ και κύριο κάθετο $\vec{n}(s)$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$X: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(s, v) = c(s) + v\vec{n}(s), \quad (s, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Είναι η απεικόνιση X κανονική παραμετρική επιφάνεια;

8. Αποδείξτε ότι όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα της κανονικής επιφάνειας με εξίσωση

$$z = xf(y/x), \quad x \neq 0,$$

όπου f είναι λεία συνάρτηση, διέρχονται από το σημείο $O = (0, 0, 0)$.

9. Έστω καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$, καμπυλότητα k με $0 < k(s) < 1/r$ για κάθε $s \in I$ και πλαίσιο Frenet $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$X: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(s, v) = c(s) + r(\cos v \vec{n}(s) + \sin v \vec{b}(s)), \quad (s, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι η απεικόνιση X είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια.

Κεφάλαιο 4

Πρώτη θεμελιώδης μορφή

Είναι γνωστό ότι το κατάλληλο εργαλείο για γεωμετρικές μετρήσεις στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n , όπως μέτρηση μήκους διανυσμάτων, γωνίας διανυσμάτων, εμβαδού, όγκου κ.ο.κ., δεν είναι άλλο παρά το εσωτερικό γινόμενο. Στόχος μας σε τούτο το κεφάλαιο είναι να εξετάσουμε πώς και με ποιό μαθηματικό εργαλείο μπορούμε να κάνουμε γεωμετρικές μετρήσεις πάνω σε τυχούσα κανονική επιφάνεια.

4.1 Πρώτη θεμελιώδης μορφή κανονικής επιφάνειας

Έστω S κανονική επιφάνεια του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 . Ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^3 είναι εφοδιασμένος με το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

όπου

$$x = (x_1, x_2, x_3) \text{ και } y = (y_1, y_2, y_3).$$

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε σημείο $p \in S$ ορίζεται το εφαπτόμενο επίπεδο T_pS , το οποίο είναι ένας διδιάστατος υπόχωρος του 3-διάστατου διανυσματικού χώρου $T_p\mathbb{R}^3$.

Ο περιορισμός του συνήθους εσωτερικού γινομένου του διανυσματικού χώρου $T_p\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3$ στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του διανυσματικού χώρου T_pS , το οποίο συμβολίζεται με

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p: T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R}, \quad (w_1, w_2) \mapsto \langle w_1, w_2 \rangle_p, \quad w_1, w_2 \in T_pS.$$

Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή αυτού του εσωτερικού γινομένου είναι η πρώτη θεμελιώδης μορφή της κανονικής επιφάνειας S στο σημείο της p .

Ορισμός 4.1.1. Έστω S κανονική επιφάνεια. Η πρώτη θεμελιώδης μορφή I_p της επιφάνειας S στο σημείο της p είναι η τετραγωνική μορφή

$$I_p: T_pS \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } I_p(w) = \|w\|^2 = \langle w, w \rangle_p \text{ και } w \in T_pS.$$

Είναι φανερό ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι θετικά οριστική αφού ισχύει

$$I_p(w) \geq 0, \text{ για κάθε } w \in T_pS$$

και

$$I_p(w) = 0 \text{ αν και μόνο αν } w = 0.$$

Λόγω της ταυτότητας

$$\|w_1 + w_2\|^2 = \|w_1\|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle_p + \|w_2\|^2,$$

έχουμε ότι

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \frac{1}{2}(I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)) \quad (4.1)$$

για τυχόντα εφαπτόμενα διανύσματα $w_1, w_2 \in T_pS$.

Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή I_p στο σημείο $p \in S$ καθορίζει πλήρως το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS . Χάριν συντομίας και αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, συχνά παραλείπουμε το δείκτη p .

Έστω κανονική επιφάνεια S και

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων της, με παραμέτρους $(u, v) \in U$ και $p \in X(U)$. Θεωρούμε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$ και επιφανειακή καμπύλη

$$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U) \text{ με } c(0) = p \text{ και } c'(0) = w.$$

Γράφοντας την καμπύλη c στη μορφή

$$c(t) = X(u(t), v(t)),$$

όπου $u(t), v(t)$ είναι λείες συναρτήσεις, έχουμε βάσει του κανόνα της αλυσίδας ότι

$$w = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q), \text{ όπου } q = X^{-1}(p).$$

Επομένως λαμβάνουμε

$$\boxed{I_p(w) = E(q)(u'(0))^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q)(v'(0))^2}, \quad (4.2)$$

όπου

$$E, F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι οι λείες συναρτήσεις

$$E = \langle X_u, X_u \rangle,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές ως **θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης** της κανονικής επιφάνειας S , ως προς το σύστημα συντεταγμένων της $X: U \rightarrow S$.

Έτσι το μήκος του εφαπτομένου διανύσματος

$$w = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q), \quad q = X^{-1}(p),$$

είναι

$$\|w\| = \sqrt{I_p(w)} = \sqrt{E(q)(u'(0))^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q)(v'(0))^2}.$$

Ο πίνακας της πρώτης θεμελιώδους μορφής ως τετραγωνικής μορφής, ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ του εφαπτομένου επιπέδου σε κάθε σημείο της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$, είναι ο 2×2 συμμετρικός πίνακας

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή καθορίζεται πλήρως από τα θεμελιώδη της ποσά πρώτης τάξης. Σημειώνουμε ότι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων.

Επειδή η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι θετικά οριστική, έχουμε ότι ισχύει

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να προκύψει ως συνέπεια του σκέλους (iii) του Ορισμού 3.1.1 και της ταυτότητας του Lagrange

$$\|X_u \times X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2,$$

ή ισοδύναμα

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2. \quad (4.3)$$

Η γωνία θ δύο μη μηδενικών εφαπτομένων διανυσμάτων $w_1, w_2 \in T_p S$ δίνεται από την ισότητα

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle_p}{\sqrt{I_p(w_1)} \sqrt{I_p(w_2)}}.$$

Αν

$$w_1 = a_1 X_u + a_2 X_v \quad \text{και} \quad w_2 = b_1 X_u + b_2 X_v,$$

τότε η γωνία τους πληροί

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 E + (a_1 b_2 + a_2 b_1) F + a_2 b_2 G}{\sqrt{E a_1^2 + 2F a_1 a_2 + G a_2^2} \sqrt{E b_1^2 + 2F b_1 b_2 + G b_2^2}}.$$

Η γωνία δύο τεμνομένων κανονικών επιφανειακών καμπυλών της κανονικής επιφάνειας S ορίζεται και υπολογίζεται ως ανωτέρω, ως η γωνία των διανυσμάτων ταχύτητάς των στο σημείο τομής. Έτσι για τυχαίο σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S,$$

η γωνία θ των παραμετρικών καμπυλών $X(t, v_0)$ και $X(u_0, t)$ στο σημείο τομής τους $X(u_0, v_0)$ δίνεται από την ισότητα

$$\cos \theta = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)} \sqrt{G(u_0, v_0)}}.$$

Το σύστημα συντεταγμένων X της κανονικής επιφάνειας S καλείται **ορθογώνιο** αν ισχύει $F = 0$, δηλαδή αν οι παραμετρικές του καμπύλες τέμνονται υπό ορθή γωνία.

4.1.1 Μήκος επιφανειακής καμπύλης

Το μήκος επιφανειακής καμπύλης $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ από το a έως το b με $[a, b] \subset I$, μιας κανονικής επιφάνειας S , είναι ο αριθμός

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t))} dt.$$

Το μήκος τόξου της καμπύλης c με αφετηρία $t_0 \in I$ είναι η συνάρτηση $s: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{I_{c(\sigma)}(c'(\sigma))} d\sigma.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

τέτοιο ώστε

$$c([a, b]) \subset X(U).$$

Τότε υπάρχουν λείες συναρτήσεις $u(t), v(t)$ τέτοιες ώστε

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b].$$

Επειδή ισχύει

$$c'(t) = u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b],$$

συμπεραίνουμε ότι το μήκος της καμπύλης δίνεται ως

$$L_a^b(c) = \int_a^b \sqrt{E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} dt,$$

όπου έχουμε εισάγει, χάριν συντομίας, τη συντομογραφία

$$E = E(u(t), v(t)), \quad F = F(u(t), v(t)), \quad G = G(u(t), v(t)).$$

Το μήκος τόξου της καμπύλης με αφετηρία $t_0 \in [a, b]$ και $t \in [a, b]$ είναι η συνάρτηση

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{E(u'(\sigma))^2 + 2Fu'(\sigma)v'(\sigma) + G(v'(\sigma))^2} d\sigma.$$

4.1.2 Εμβαδό

Έστω S κανονική επιφάνεια και $R \subseteq S$ χωρίο της, για το οποίο υπάρχει σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S,$$

με παραμέτρους $(u, v) \in U$, τέτοιο ώστε $R \subseteq X(U)$. Ο αριθμός

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \|X_u \times X_v\| dudv$$

ονομάζεται **εμβαδό** του χωρίου R .

Βεβαίως πρέπει να διαπιστωθεί αν ο ορισμός αυτός είναι καλός, δηλαδή ανεξάρτητος της επιλογής του συστήματος συντεταγμένων. Πράγματι, θεωρούμε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων

$$\tilde{X}: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

με παραμέτρους $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{U}$, τέτοιο ώστε $R \subseteq \tilde{X}(\tilde{U})$. Από την Πρόταση 3.1.5, γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση

$$\Phi = \tilde{X}^{-1} \circ X: X^{-1}(W) \rightarrow \tilde{X}^{-1}(W) \quad \text{με} \quad \Phi(u, v) = (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$$

είναι διαφορομορφισμός, όπου $W := X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U}) \neq \emptyset$. Όμως επειδή

$$X = \tilde{X} \circ \Phi,$$

από τον κανόνα της αλυσίδας λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{v}}, \\ X_v &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{v}}. \end{aligned}$$

Από αυτές προκύπτει ότι

$$X_u \times X_v = \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}.$$

Τότε, κάνοντας χρήση του Θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών για τα διπλά ολοκληρώματα, έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{X}^{-1}(R)} \|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u}d\tilde{v} &= \iint_{X^{-1}(R)} \|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\| \left| \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \right| dudv \\ &= \iint_{X^{-1}(R)} \left\| \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}} \right\| dudv \\ &= \iint_{X^{-1}(R)} \|X_u \times X_v\| dudv. \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της ισότητας (4.3) προκύπτει ότι το εμβαδό του χωρίου R ισοδύναμα είναι

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Τούτο σημαίνει ότι για τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου απαιτείται γνώση μόνο της πρώτης θεμελιώδους μορφής.

4.2 Έσωθεν γεωμετρία-Ισομετρίες

Έχουμε διαπιστώσει πως η πρώτη θεμελιώδης μορφή μιας κανονικής επιφάνειας είναι εκείνο το εργαλείο το οποίο μας επιτρέπει να

κάνουμε μετρήσεις γεωμετρικού χαρακτήρα επί της επιφάνειας, όπως μέτρηση μήκους διανύσματος, μήκους καμπύλης, εμβαδού κ.ο.κ.. Με άλλα λόγια, οι μετρήσεις αυτές εξαρτώνται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή και όχι από το πώς φαίνεται η επιφάνεια από εξωτερικό παρατηρητή. Για αυτό το λόγο, όλες αυτές οι έννοιες ή αναλλοίωτες οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή καλούνται **εσωτερικές έννοιες ή εσωτερικές αναλλοίωτες** της επιφάνειας.

Γενικότερα, με τον όρο **έσωθεν (εσωτερική) γεωμετρία** μιας κανονικής επιφάνειας, εννοούμε τη μελέτη όλων εκείνων των γεωμετρικών εννοιών ή αναλλοιώτων οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή.

Υπό αυτή την οπτική γωνία, έχει νόημα να αναρωτηθεί κανείς τι σημαίνει δύο κανονικές επιφάνειες να έχουν την ίδια έσωθεν γεωμετρία, δηλαδή την ίδια πρώτη θεμελιώδη μορφή. Για το λόγο αυτό, εισάγουμε στον ακόλουθο ορισμό τη σημαντική έννοια της ισομετρίας μεταξύ κανονικών επιφανειών.

Ορισμός 4.2.1. Έστω $\Phi: S \rightarrow \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ κανονικών επιφανειών S και \tilde{S} με πρώτες θεμελιώδεις μορφές I και \tilde{I} , αντίστοιχα.

(i) Η απεικόνιση Φ καλείται **ισομετρία** μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και \tilde{S} αν είναι διαφορομορφισμός και για κάθε σημείο $p \in S$ και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$ ισχύει

$$\tilde{I}_{\Phi(p)}(d\Phi_p(w)) = I_p(w).$$

(ii) Η επιφάνεια \tilde{S} καλείται **ισομετρική** της S αν υπάρχει ισομετρία $\Phi: S \rightarrow \tilde{S}$.

Ισοδύναμα, κάνοντας χρήση της ταυτότητας (4.1), έχουμε ότι ένας διαφορομορφισμός $\Phi: S \rightarrow \tilde{S}$ είναι ισομετρία, αν για κάθε σημείο $p \in S$ και τυχόντα εφαπτόμενα διανύσματα $w_1, w_2 \in T_p S$ ισχύει

$$\langle d\Phi_p(w_1), d\Phi_p(w_2) \rangle_{\Phi(p)} = \langle w_1, w_2 \rangle_p.$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι το διαφορικό

$$d\Phi_p: T_p S \rightarrow T_{\Phi(p)} \tilde{S}$$

της απεικόνισης Φ στο τυχόν σημείο $p \in S$ είναι ισομετρία (με την έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας¹) μεταξύ των αντιστοιχών εφαπτομένων επιπέδων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι γεωμετρικώς ισότιμες κανονικές επιφάνειες είναι ισομετρικές, όπως προκύπτει από την πρόταση που ακολουθεί. Το αντίστροφο όμως δεν είναι αληθές εν γένει, όπως θα αποδειχθεί στα Παραδείγματα 4.2.1 και 4.2.2 τα οποία έπονται.

Πρόταση 4.2.1. Έστω S και \tilde{S} κανονικές επιφάνειες με πρώτες θεμελιώδεις μορφές I και \tilde{I} , αντίστοιχα. Αν οι επιφάνειες S και \tilde{S} είναι γεωμετρικώς ισότιμες και $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι ισομετρία του \mathbb{R}^3 τέτοια ώστε $\tilde{S} = T(S)$, τότε ο περιορισμός $T|_S: S \rightarrow \tilde{S}$ είναι ισομετρία μεταξύ των επιφανειών S και \tilde{S} .

Απόδειξη. Η ισομετρία T είναι διαφορομορφισμός. Επιπλέον, αν A είναι το γραμμικό μέρος της T , δηλαδή $T = T_v \circ A$, όπου $A \in O(3)$, τότε γνωρίζουμε ότι

$$dT_p = A \text{ για κάθε σημείο } p \in \mathbb{R}^3.$$

Από αυτή άμεσα προκύπτει

$$\tilde{I}_{T(p)}(dT_p(w)) = \langle Aw, Aw \rangle = \langle w, w \rangle = I_p(w),$$

για κάθε σημείο $p \in S$ και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$. Συνεπώς, ο περιορισμός $T|_S: S \rightarrow \tilde{S}$ είναι ισομετρία. \square

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\Phi: S \rightarrow \tilde{S}$, μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και \tilde{S} , είναι ισομετρία, τότε και η αντίστροφή της $\Phi^{-1}: \tilde{S} \rightarrow S$ είναι ισομετρία.

Επιπλέον η σύνθεση ισομετριών είναι ισομετρία, ενώ η ταυτοτική απεικόνιση κάθε επιφάνειας είναι επίσης ισομετρία (άσκηση!). Όλα

¹ Ένας γραμμικός ισομορφισμός $L: V \rightarrow W$ μεταξύ διανυσματικών χώρων V και W εφοδιασμένων με εσωτερικά γινόμενα $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, αντίστοιχα, καλείται *ισομετρία* αν ισχύει

$$\langle Lx, Ly \rangle_W = \langle x, y \rangle_V$$

για κάθε $x, y \in V$, όπου χάριν απλότητας γράφουμε $L(x) = Lx$.

τούτα μας επιτρέπουν να ορίσουμε μια σχέση ισοτιμίας (ισοδυναμίας) στο σύνολο των κανονικών επιφανειών. Κάθε κλάση ισοτιμίας μιας κανονικής επιφάνειας αποτελείται από το σύνολο όλων των κανονικών επιφανειών οι οποίες είναι ισομετρικές προς αυτή.

Υπό αυτή την έννοια, ισομετρικές επιφάνειες είναι ταυτόσημες από τη σκοπιά της έσωθεν γεωμετρίας. Πράγματι, βάσει του Ορισμού 4.2.1 καταλήγουμε στην ακόλουθη διαπίστωση.

Επειδή οι ισομετρίες μεταξύ κανονικών επιφανειών διατηρούν την πρώτη θεμελιώδη μορφή, θα διατηρούν επίσης κάθε αναλλοίωτο η οποία υπολογίζεται ή εξαρτάται μόνον από την πρώτη θεμελιώδη μορφή. Με άλλα λόγια, ισομετρικές επιφάνειες έχουν την ίδια έσωθεν γεωμετρία.

Ειδικότερα, οι ισομετρίες μεταξύ κανονικών επιφανειών διατηρούν τα μήκη καμπυλών, καθώς και τα εμβαδά.

Πως όμως εξετάζουμε αν δύο επιφάνειες είναι ισομετρικές;

Ας υποθέσουμε κατ' αρχάς ότι δύο κανονικές επιφάνειες S και \tilde{S} είναι ισομετρικές και

$$\Phi: S \rightarrow \tilde{S}$$

είναι μια μεταξύ τους ισομετρία. Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

με παραμέτρους $(u, v) \in U$ και θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης E, F, G .

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η απεικόνιση

$$\tilde{X} = \Phi \circ X$$

είναι σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας \tilde{S} με παραμέτρους $(u, v) \in U$. Συμβολίζουμε με $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ τα αντίστοιχα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης του συστήματος συντεταγμένων \tilde{X} . Είναι φανερό, από τον ορισμό του διαφορικού, ότι ισχύουν

$$\tilde{X}_u = d\Phi(X_u) \quad \text{και} \quad \tilde{X}_v = d\Phi(X_v).$$

Επειδή η απεικόνιση Φ είναι ισομετρία, έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_u \rangle = \langle d\Phi(X_u), d\Phi(X_u) \rangle = \langle X_u, X_u \rangle = E, \\ \tilde{F} &= \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle = \langle d\Phi(X_u), d\Phi(X_v) \rangle = \langle X_u, X_v \rangle = F, \\ \tilde{G} &= \langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_v \rangle = \langle d\Phi(X_v), d\Phi(X_v) \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = G.\end{aligned}$$

Τούτο σημαίνει ότι οι ισομετρικές επιφάνειες S και \tilde{S} έχουν ίσα αντίστοιχα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης ως προς κοινές παραμέτρους.

Η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι και το αντίστροφο είναι αληθές.

Πρόταση 4.2.2. Έστω κανονικές επιφάνειες S και \tilde{S} με συστήματα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \quad \text{και} \quad \tilde{X}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{S}$$

με κοινές παραμέτρους $(u, v) \in U$ και θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης E, F, G και $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$, αντίστοιχα. Αν ισχύει

$$\tilde{E} = E, \quad \tilde{F} = F \quad \text{και} \quad \tilde{G} = G,$$

τότε η απεικόνιση

$$\tilde{X} \circ X^{-1}: X(U) \rightarrow \tilde{X}(U)$$

είναι ισομετρία μεταξύ των κανονικών επιφανειών $X(U)$ και $\tilde{X}(U)$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.1.5 και την Παρατήρηση 3.2.2 γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση $\Phi = \tilde{X} \circ X^{-1}$ είναι διαφορομορφισμός.

Για να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση Φ είναι ισομετρία, αρκεί να αποδείξουμε ότι επιπλέον διατηρεί την πρώτη θεμελιώδη μορφή. Πράγματι, για τυχόν σημείο $p = X(q) \in X(U)$ και τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$, θεωρούμε επιφανειακή καμπύλη c με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

όπου $u(t), v(t)$ είναι λείες συναρτήσεις, τέτοια ώστε $c(0) = p$ και $c'(0) = w$. Κατά τα γνωστά, είναι

$$w = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q).$$

Επειδή

$$d\Phi_p(w) = \tilde{c}'(0),$$

όπου $\tilde{c}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \tilde{S}$ είναι η επιφανειακή καμπύλη της επιφάνειας \tilde{S} με παραμετρική παράσταση

$$\tilde{c}(t) = \Phi \circ c(t) = \tilde{X}(u(t), v(t)),$$

έχουμε ότι

$$d\Phi_p(w) = u'(0)\tilde{X}_u(q) + v'(0)\tilde{X}_v(q).$$

Κάνοντας χρήση της ισότητας (4.2) και επειδή από υπόθεση ισχύει $\tilde{E} = E, \tilde{F} = F$ και $\tilde{G} = G$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\Phi(p)}(d\Phi_p(w)) &= \tilde{E}(q)(u'(0))^2 + 2\tilde{F}(q)u'(0)v'(0) + \tilde{G}(q)(v'(0))^2 \\ &= E(q)(u'(0))^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q)(v'(0))^2 \\ &= I_p(w). \end{aligned}$$

Αυτό φανερώνει ότι η απεικόνιση Φ είναι ισομετρία και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Παράδειγμα 4.2.1. Στην Πρόταση 4.2.2, θεωρούμε ως κανονική επιφάνεια S τον ορθό κυκλικό κύλινδρο με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r > 0,$$

και ως κανονική επιφάνεια \tilde{S} το επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το σημείο $p_0 \in \mathbb{R}^3$ και είναι παράλληλο προς τα ορθομοναδιαία διανύσματα $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$. Εύκολα ελέγχεται ότι οι απεικονίσεις

$$X: U \rightarrow V \cap S \quad \text{με} \quad X(u, v) = \left(r \cos \frac{u}{r}, r \sin \frac{u}{r}, v \right),$$

$$\tilde{X}: U \rightarrow \tilde{S} \quad \text{με} \quad \tilde{X}(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2,$$

είναι συστήματα συντεταγμένων των επιφανειών S και \tilde{S} , αντίστοιχα, όπου

$$U = (0, 2\pi r) \times \mathbb{R} \quad \text{και} \quad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = r, y = 0\}.$$

Τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης των επιφανειών αυτών, ως προς τα ανωτέρω συστήματα συντεταγμένων, είναι

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= E = 1, \\ \tilde{F} &= F = 0, \\ \tilde{G} &= G = 1,\end{aligned}$$

αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.2, οι κανονικές επιφάνειες $X(U)$ και $\tilde{X}(U)$ είναι ισομετρικές. Ειδικότερα, η απεικόνιση $\tilde{X} \circ X^{-1}: X(U) \rightarrow \tilde{X}(U)$ είναι ισομετρία μεταξύ των κανονικών επιφανειών $X(U) \subset S$ και $\tilde{X}(U) \subset \tilde{S}$.

Στην πραγματικότητα έχουμε αποδείξει ότι, κάθε σημείο του κύλινδρου S έχει μια περιοχή στην S η οποία είναι ισομετρική με μια περιοχή του επιπέδου. Με άλλα λόγια, ο κύλινδρος και οποιοδήποτε επίπεδο είναι τοπικά ισομετρικές επιφάνειες. Είναι φανερό όμως ότι δεν είναι γεωμετρικώς ισότιμες επιφάνειες.

Τονίζουμε όμως ότι δεν ισομετρικές επιφάνειες. Αν ήταν ισομετρικές, θα έπρεπε να ήταν και ομοιομορφικές. Όμως δεν είναι ομοιομορφικές, διότι το επίπεδο έχει μια τοπολογική ιδιότητα (ποιά;), την οποία δεν διαθέτει ο κύλινδρος.

Παράδειγμα 4.2.2. Το αλυσοειδές είναι η επιφάνεια S με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2 \frac{z}{a},$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι μη μηδενική σταθερά. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 3.1.1, προκύπτει ότι το αλυσοειδές είναι κανονική επιφάνεια με σύστημα συντεταγμένων

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R},$$

και αντίστοιχα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

$$E(u, v) = G(u, v) = a^2 \cosh^2 v, \quad F(u, v) = 0.$$

Το ελικοειδές είναι η επιφάνεια \tilde{S} με εξίσωση

$$x \sin \frac{z}{a} = y \cos \frac{z}{a}.$$

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 3.1.1, συμπεραίνουμε ότι και το ελικοειδές είναι κανονική επιφάνεια με σύστημα συντεταγμένων

$$\tilde{X}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{v} \cos \tilde{u}, \tilde{v} \sin \tilde{u}, a\tilde{u}), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R},$$

και αντίστοιχα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

$$\tilde{E}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{v}^2 + a^2, \quad \tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0, \quad \tilde{G}(\tilde{u}, \tilde{v}) = 1.$$

Παρατηρούμε όμως ότι, αν θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$\Phi: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

με

$$\Phi(u, v) = (u, a \sinh v) = (\tilde{u}, \tilde{v}),$$

τότε η απεικόνιση

$$\bar{X} = \tilde{X} \circ \Phi$$

με

$$\bar{X}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au)$$

είναι σύστημα συντεταγμένων του ελικοειδούς, με θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

$$\bar{E}(u, v) = \bar{G}(u, v) = a^2 \cosh^2 v, \quad \bar{F}(u, v) = 0.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.2, το αλυσσοειδές και το ελικοειδές είναι τοπικά ισομετρικές επιφάνειες. Είναι προφανές όμως ότι δεν είναι γεωμετρικώς ισότιμες επιφάνειες.

4.3 Ασκήσεις

1. Έστω $\Phi: S \rightarrow \tilde{S}$ τοπική ισομετρία μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και \tilde{S} . Αν $c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ είναι καμπύλη της επιφάνειας S και $[a, b] \subset I$, τότε αποδείξτε ότι για τα μήκη των καμπυλών c και $\tilde{c} = \Phi \circ c$ ισχύει

$$L_a^b(\tilde{c}) = L_a^b(c).$$

4.3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2. Υπολογίστε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας γραφίμα Γ_h στο τυχόν της σημείο, όπου $h: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση.
3. Αποδείξτε ότι αν μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\Phi: S \rightarrow \tilde{S}$ μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και \tilde{S} είναι ισομετρία, τότε και η αντίστροφη της $\Phi^{-1}: \tilde{S} \rightarrow S$ είναι επίσης ισομετρία.
4. Αποδείξτε η σύνθεση ισομετριών μεταξύ κανονικών επιφανειών είναι ισομετρία. Επιπλέον αποδείξτε ότι η ταυτοτική απεικόνιση κάθε επιφάνειας είναι επίσης ισομετρία. Τι δομή φέρει το σύνολο όλων των ισομετριών τυχούσας κανονικής επιφάνειας;

Κεφάλαιο 5

Προσανατολισμός-Απεικόνιση Gauss

5.1 Προσανατολισμός-Μοναδιαίο κάθετο

Έστω S κανονική επιφάνεια του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 και

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$ και θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης E, F, G . Γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο p της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$ τα διανύσματα

$$\{X_u(X^{-1}(p)), X_v(X^{-1}(p))\}$$

συνιστούν μια βάση του εφαπτομένου επιπέδου $T_p S$. Το διάνυσμα

$$\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(X^{-1}(p)) = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}(X^{-1}(p))$$

είναι ένα από τα δύο μοναδιαία και ορθογώνια διανύσματα στο επίπεδο $T_p S$ (προφανώς, το άλλο διάνυσμα είναι το αντίθετό του).

Η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο p και είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_p S$, καλείται **κάθετη ευθεία** της επιφάνειας S στο σημείο της p .

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$N: X(U) \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}.$$

Λόγω της Παρατήρησης 3.2.2, η απεικόνιση N είναι λεία και καλείται μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της επιφάνειας S στην περιοχή συντεταγμένων $X(U)$.

Ας θεωρήσουμε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων

$$\tilde{X}: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

με παραμέτρους $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{U}$ και αντίστοιχο κάθετο μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο \tilde{N} στην περιοχή συντεταγμένων $\tilde{X}(\tilde{U})$ με

$$\tilde{N} = \frac{\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\|} \circ \tilde{X}^{-1}.$$

Αν ισχύει $W := X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U}) \neq \emptyset$, τότε από την Πρόταση 3.1.5 γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση

$$\Phi = \tilde{X}^{-1} \circ X: X^{-1}(W) \rightarrow \tilde{X}^{-1}(W)$$

με

$$\Phi(u, v) = (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$$

είναι διαφορομορφισμός. Όμως επειδή είναι

$$X = \tilde{X} \circ \Phi,$$

από τον κανόνα της αλυσίδας λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{v}}, \\ X_v &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{v}}. \end{aligned}$$

Από αυτές προκύπτει άμεσα ότι

$$X_u \times X_v = \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}$$

και επομένως στην περιοχή W ισχύει

$$\tilde{N} = \pm N.$$

Τούτο εγείρει εύλογα το ερώτημα, αν σε κάθε κανονική επιφάνεια υπάρχει ένα μοναδιαίο και κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο το οποίο να ορίζεται σε ολόκληρη την επιφάνεια. Στην πραγματικότητα, την ιδιότητα αυτή έχουν μόνο οι λεγόμενες προσανατολισμένες επιφάνειες, όπως συνάγεται από τα ακόλουθα.

Ορισμός 5.1.1. Μια κανονική επιφάνεια S καλείται **προσανατολισιμη**, αν υπάρχει οικογένεια συστημάτων συντεταγμένων $\{X_a\}_{a \in A}$ με $X_a: U_a \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ τέτοια ώστε

$$\cup_{a \in A} X_a(U_a) = S$$

και

$$\det d(X_b^{-1} \circ X_a) > 0$$

στο ανοικτό σύνολο $X_a^{-1}(W_{ab})$, όπου $W_{ab} = X_a(U_a) \cap X_b(U_b)$, για κάθε $a, b \in A$ με $W_{ab} \neq \emptyset$.

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο αναφέρουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 5.1.1. Έστω S κανονική επιφάνεια. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ενός μοναδιαίου και καθέτου διαφορίσιμου διανυσματικού πεδίου $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, το οποίο να ορίζεται σε ολόκληρη την επιφάνεια, είναι η επιφάνεια S να είναι προσανατολισιμη.

Αν μια κανονική επιφάνεια S είναι προσανατολισιμη, τότε υπάρχουν δύο ακριβώς μοναδιαία κάθετα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία τα οποία ορίζονται σε ολόκληρη την επιφάνεια. Καθένα από αυτά ονομάζεται **προσανατολισμός** της S . Η επιφάνεια S καλείται **προσανατολισμένη** αν είναι προσανατολισιμη και έχουμε προεπιλέξει ένα προσανατολισμό αυτής.

Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με προσανατολισμό N . Ένα σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας S

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S,$$

με παραμέτρους $(u, v) \in U$, θα λέμε ότι ανήκει στο δεδομένο προσανατολισμό N της επιφάνειας, αν στη περιοχή συντεταγμένων $X(U)$ ισχύει

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}.$$

Δεν είναι όλες οι κανονικές επιφάνειες προσανατολίσιμες. Το πλέον γνωστό παράδειγμα μη προσανατολίσιμης επιφάνειας είναι η λεγόμενη ταινία του Möbius (για λεπτομέρειες δες το [3]).

Κάθε επιφάνεια γράφημα Γ_h μιας λείας συνάρτησης h (δες το Παράδειγμα 3.1.1) είναι προσανατολίσιμη, με μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο

$$N: \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

όπου

$$N(x, y, h(x, y)) = \frac{(-h_x(x, y), -h_y(x, y), 1)}{\sqrt{1 + h_x^2(x, y) + h_y^2(x, y)}}.$$

Είναι προφανές ότι κάθε κανονική επιφάνεια είναι τοπικά προσανατολίσιμη, με προσανατολισμό που ορίζεται ως

$$N: X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ με } N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1},$$

όπου $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ είναι σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$.

Το Θεώρημα 3.1.1 μας παρέχει μια μέθοδο κατασκευής προσανατολίσιμων επιφανειών.

Θεώρημα 5.1.2. Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό υποσύνολο U του \mathbb{R}^3 και $a \in f(U)$. Αν κανένα κρίσιμο

σημείο της f δεν ανήκει στο σύνολο $f^{-1}(a)$, τότε το σύνολο αυτό είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια με προσανατολισμό

$$N: f^{-1}(a) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

όπου

$$N(p) = \frac{\text{grad}f(p)}{\|\text{grad}f(p)\|}, \quad p \in f^{-1}(a).$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ήδη από το Θεώρημα 3.1.1 ότι το σύνολο $f^{-1}(a)$ είναι κανονική επιφάνεια. Θεωρούμε τυχόν σημείο $p \in f^{-1}(a)$ και τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p f^{-1}(a)$. Τότε υπάρχει λεία επιφανειακή καμπύλη

$$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow f^{-1}(a),$$

με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

τέτοια ώστε

$$c(0) = p \quad \text{και} \quad c'(0) = w.$$

Παραγωγίζοντας τη σταθερή συνάρτηση

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a,$$

με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας λαμβάνουμε

$$x'(0)f_x(p) + y'(0)f_y(p) + z'(0)f_z(p) = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\langle w, \text{grad}f(p) \rangle = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\text{grad}f(p)$ είναι ορθογώνιο στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_p f^{-1}(a)$. \square

Ισχύει το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα, του οποίου την απόδειξη παραλείπουμε.

Θεώρημα 5.1.3. Κάθε συμπαγής κανονική επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη.

5.2 Απεικόνιση Gauss

Σημαντικό ρόλο στη μελέτη της γεωμετρίας των κανονικών επιφανειών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 διαδραματίζει η λεγόμενη απεικόνιση Gauss ή σφαιρική απεικόνιση.

Ορισμός 5.2.1. Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με προσανατολισμό N . Η απεικόνιση Gauss ή σφαιρική απεικόνιση της επιφάνειας S είναι η απεικόνιση (συμβολίζεται με το ίδιο σύμβολο N)

$$N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

η οποία στο τυχόν σημείο $p \in S$ αντιστοιχεί το σημείο¹ $\tilde{p} \in \mathbb{S}^2$ το οποίο είναι το πέρας του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος $N(p)$ της S στο p , όταν αυτό το μεταφέρουμε παράλληλα στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 ώστε η αρχή του να συμπίσει με το κέντρο της μοναδιαίας σφαίρας \mathbb{S}^2 .

Είναι φανερό πως η απεικόνιση Gauss είναι λεία ως απεικόνιση μεταξύ των κανονικών επιφανειών S και \mathbb{S}^2 .

Παράδειγμα 5.2.1. Κάθε επιφάνεια γράφημα Γ_h , όπου

$$h: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι λεία συνάρτηση (Παράδειγμα 3.1.1), είναι προσανατολίσιμη με μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο

$$N: \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

όπου

$$N(x, y, h(x, y)) = \frac{(-h_x(x, y), -h_y(x, y), 1)}{\sqrt{1 + h_x^2(x, y) + h_y^2(x, y)}}.$$

Επομένως, η απεικόνιση Gauss της επιφάνειας γράφημα Γ_h είναι η απεικόνιση

$$N: \Gamma_h \rightarrow \mathbb{S}^2$$

¹Προφανώς, οι συντεταγμένες του σημείου $\tilde{p} \in \mathbb{S}^2$ είναι ακριβώς οι συντεταγμένες του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος $N(p)$. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η απεικόνιση Gauss συμβολίζεται με ίδιο σύμβολο N .

με

$$N(p) = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}(x, y), \quad p = (x, y, h(x, y)) \in \Gamma_h.$$

Παρατηρούμε πως η σφαιρική εικόνα (η εικόνα δηλαδή της απεικόνισης Gauss) περιέχεται στο άνω ημισφαίριο της σφαίρας \mathbb{S}^2 .

Παράδειγμα 5.2.2. Θεωρούμε το επίπεδο Π με εξίσωση

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0, \quad (A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.2, το επίπεδο Π είναι προσανατολισμένη επιφάνεια της οποίας η απεικόνιση Gauss είναι η σταθερή απεικόνιση

$$N: \Pi \rightarrow \mathbb{S}^2$$

με

$$N(p) = \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}, \quad p \in \Pi.$$

Παρατηρούμε ότι η σφαιρική εικόνα αποτελείται από ένα μόνο σημείο, αφού είναι

$$N(\Pi) = \left\{ \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} \right\}.$$

Παράδειγμα 5.2.3. Ο ορθός κυκλικός κύλινδρος

$$C_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

του Παραδείγματος 3.1.5 είναι προσανατολισμένη επιφάνεια, της οποίας η απεικόνιση Gauss είναι η απεικόνιση

$$N: C_r \rightarrow \mathbb{S}^2$$

με

$$N(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, 0), \quad (x, y, z) \in C_r.$$

Παρατηρούμε ότι, η σφαιρική εικόνα είναι ο μέγιστος κύκλος της σφαίρας \mathbb{S}^2 με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{και} \quad z = 0.$$

Παράδειγμα 5.2.4. Η σφαίρα

$$\mathbb{S}_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

του Παραδείγματος 3.1.4 είναι προσανατολισμένη επιφάνεια, της οποίας η απεικόνιση Gauss είναι η απεικόνιση

$$N: \mathbb{S}_R^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

με

$$N(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{S}_R^2.$$

Η σφαιρική εικόνα είναι ολόκληρη η σφαίρα \mathbb{S}^2 . Παρατηρούμε επίσης ότι η απεικόνιση Gauss της σφαίρας \mathbb{S}_R^2 είναι 1-1 και επί. Στην πραγματικότητα η απεικόνιση Gauss της σφαίρας \mathbb{S}_R^2 είναι διαφορομορφισμός.

Παρατήρηση 5.2.1. Σημειώνουμε πως αν αλλάξουμε προσανατολισμό, η απεικόνιση Gauss είναι η αντίθετη της αρχικής.

Πως σχετίζονται οι απεικονίσεις Gauss γεωμετρικώς ισότιμων επιφανειών; Η απάντηση δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.2.1. Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss

$$N: S \rightarrow \mathbb{S}^2.$$

(i) Κάθε κανονική επιφάνεια, η οποία είναι γεωμετρικώς ισότιμη με την επιφάνεια S , είναι προσανατολίσιμη.

(ii) Αν μια κανονική επιφάνεια \tilde{S} είναι γεωμετρικώς ισότιμη με την επιφάνεια S και $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι ισομετρία του \mathbb{R}^3 τέτοια ώστε $\tilde{S} = T(S)$, τότε η απεικόνιση

$$\tilde{N}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}^2 \text{ με } \tilde{N} \circ T = AN,$$

ορίζει προσανατολισμό στην επιφάνεια \tilde{S} , όπου A είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T .

5.2. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ GAUSS

(iii) Αν οι προσανατολισμένες επιφάνειες S και \tilde{S} είναι γεωμετρικώς ισότιμες, τότε οι απεικονίσεις Gauss αυτών $N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$ και $\tilde{N}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\tilde{N} \circ T = \varepsilon AN,$$

όπου $\varepsilon = 1$ αν ο ορθογώνιος μετασχηματισμός A είναι στροφή γύρω από άξονα, ενώ $\varepsilon = -1$ αν ο A είναι ψευδοστροφή.

Απόδειξη. Έστω ότι

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

είναι σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U$ το οποίο ανήκει στον δοσμένο προσανατολισμό N της επιφάνειας S , δηλαδή ισχύει

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}$$

στην περιοχή συντεταγμένων $X(U)$.

Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση $\tilde{X} = T \circ X$ είναι σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας \tilde{S} . Προφανώς έχουμε

$$\tilde{X}_u = AX_u, \quad \tilde{X}_v = AX_v,$$

όπου $A \in O(3)$ είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T . Επιπλέον, βάσει της Πρότασης Α'.2.4(v), έχουμε

$$\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v = \varepsilon A (X_u \times X_v),$$

όπου $\varepsilon = 1$ αν ο ορθογώνιος μετασχηματισμός A διατηρεί τον προσανατολισμό και $\varepsilon = -1$ αν τον αντιστρέφει.

Είναι φανερό ότι το διάνυσμα AN είναι ορθογώνιο στα διανύσματα \tilde{X}_u, \tilde{X}_v , και επομένως η απεικόνιση

$$\tilde{N}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$$

που ορίζεται μέσω της

$$\tilde{N} \circ T = AN,$$

ορίζει προσανατολισμό επί της επιφάνειας \tilde{S} και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

5.3 Ασκήσεις

1. Δίνεται η επιφάνεια με εξίσωση

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Αφού αποδείξετε ότι είναι κανονική επιφάνεια, να βρείτε την απεικόνιση Gauss καθώς και τη σφαιρική της εικόνα.

2. Αποδείξτε ότι ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της παραμετρικής επιφάνειας της Άσκησης 3.6.9 είναι το

$$N(s, v) = \cos v \vec{n}(s) + \sin v \vec{b}(s).$$

3. Αποδείξτε ότι η επιφάνεια S με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

είναι προσανατολίσιμη. Βρείτε ένα προσανατολισμό της και την αντίστοιχη απεικόνιση Gauss N . Περιγράψτε γεωμετρικά την εικόνα της απεικόνισης Gauss. Είναι η απεικόνιση Gauss 1-1;

Κεφάλαιο 6

Απεικόνιση Weingarten-Δεύτερη θεμελιώδης μορφή

Τα παραδείγματα των τοπικώς ισομετρικών επιφανειών τα οποία έχουμε ήδη μελετήσει, δηλαδή ο κύλινδρος με το επίπεδο καθώς και το ελικοειδές με το αλυσοειδές, καταδεικνύουν ότι δεν αρκεί η έσωθεν γεωμετρία για να καθοριστεί μια κανονική επιφάνεια του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 ως προς γεωμετρική ισοτιμία. Είναι λογικό επομένως να στραφούμε τώρα προς την έξωθεν γεωμετρία.

Για να μελετήσουμε την έξωθεν γεωμετρία μιας επιφάνειας, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε πως μεταβάλλεται το εφαπτόμενο επίπεδο της από σημείο σε σημείο. Ισοδύναμα, αρκεί να μελετήσουμε πως μεταβάλλεται η απεικόνιση Gauss.

Για το σκοπό αυτό, εισάγουμε την καλούμενη απεικόνιση Weingarten ή αλλιώς τελεστή σχήματος για κάθε κανονική και προσανατολισμένη επιφάνεια.

6.1 Απεικόνιση Weingarten

Ορισμός 6.1.1. Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss

$$N: S \rightarrow \mathbb{S}^2.$$

Ονομάζουμε απεικόνιση Weingarten ή τελεστή σχήματος της επιφάνειας S στο τυχόν σημείο $p \in S$ την γραμμική απεικόνιση

$$L_p: T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$$

με

$$L_p = -dN_p.$$

Τα εφαπτόμενα επίπεδα $T_p S$ και $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ των κανονικών επιφανειών S και \mathbb{S}^2 είναι παράλληλα, αφού και τα δύο είναι ορθογώνια στο διάνυσμα $N(p)$. Επομένως, μπορούμε να τα ταυτίσουμε μέσω παράλληλης μεταφοράς στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 και να θεωρήσουμε την απεικόνιση Weingarten ως μετασχηματισμό του εφαπτομένου επιπέδου $T_p S$, δηλαδή ως γραμμικό ενδομορφισμό

$$L_p: T_p S \rightarrow T_p S.$$

Αξίζει να τονιστεί ότι η απεικόνιση Weingarten εξαρτάται από τον προσανατολισμό. Πράγματι, είναι φανερό ότι αλλάζει πρόσημο αν αλλάξουμε τον προσανατολισμό επιλέγοντας τον αντίθετο (Παρατήρηση 5.2.1).

Παράδειγμα 6.1.1. Θεωρούμε το επίπεδο Π με εξίσωση

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0),$$

και απεικόνιση Gauss (Παράδειγμα 5.2.2)

$$N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

με

$$N(p) = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad p \in \Pi.$$

Η απεικόνιση Weingarten του επιπέδου, στο τυχόν σημείο του $p \in \Pi$, είναι η γραμμική απεικόνιση

$$L_p: T_p \Pi \rightarrow T_p \Pi$$

με

$$L_p w = -(N \circ c)'(0) = 0, \quad w \in T_p \Pi,$$

όπου $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Pi$ είναι καμπύλη του επιπέδου Π με

$$c(0) = p \text{ και } c'(0) = w.$$

Επομένως η απεικόνιση Weingarten του επιπέδου, σε κάθε σημείο του, είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα 6.1.2. Ο ορθός κυκλικός κύλινδρος

$$C_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

του Παραδείγματος 5.2.3 είναι προσανατολισμένη επιφάνεια, της οποίας η απεικόνιση Gauss είναι

$$N: C_r \rightarrow \mathbb{S}^2$$

με

$$N(x, y, z) = -\frac{1}{r}(x, y, 0), \quad (x, y, z) \in C_r.$$

Η απεικόνιση Weingarten του κυλίνδρου, στο τυχόν σημείο του $p \in C_r$, είναι η γραμμική απεικόνιση

$$L_p: T_p C_r \rightarrow T_p C_r$$

με

$$L_p w = -(N \circ c)'(0), \quad w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p C_r,$$

όπου $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C_r$ είναι καμπύλη του κυλίνδρου C_r με

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

τέτοια ώστε

$$c(0) = p \text{ και } c'(0) = w = (x'(0), y'(0), z'(0)).$$

Επειδή ισχύει

$$(N \circ c)(t) = -\frac{1}{r}(x(t), y(t), 0),$$

παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι

$$L_p w = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0), \quad w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p C_r.$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο του κυλίνδρου C_r στο τυχόν σημείο του $p = (x, y, z)$ είναι

$$T_p C_r = \{w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p \mathbb{R}^3 : xw_1 + yw_2 = 0\}.$$

Παράδειγμα 6.1.3. Η σφαίρα

$$\mathbb{S}_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

του Παραδείγματος 3.1.4 είναι προσανατολισμένη επιφάνεια, της οποίας η απεικόνιση Gauss είναι

$$N: \mathbb{S}_R^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

με

$$N(x, y, z) = -\frac{1}{R}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{S}_R^2.$$

Η απεικόνιση Weingarten της σφαίρας, στο τυχόν σημείο της $p \in \mathbb{S}_R^2$, είναι η γραμμική απεικόνιση

$$L_p: T_p \mathbb{S}_R^2 \rightarrow T_p \mathbb{S}_R^2$$

με

$$L_p w = -(N \circ c)'(0), \quad w \in T_p \mathbb{S}_R^2,$$

όπου $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}_R^2$ είναι καμπύλη της σφαίρας \mathbb{S}_R^2 με

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

τέτοια ώστε

$$c(0) = p \quad \text{και} \quad c'(0) = w = (x'(0), y'(0), z'(0)).$$

Επειδή είναι

$$(N \circ c)(t) = -\frac{1}{R}c(t),$$

παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι

$$L_p w = \frac{1}{R} w, \quad w \in T_p \mathbb{S}_R^2.$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας \mathbb{S}_R^2 στο σημείο της $p = (x, y, z)$ είναι

$$T_p \mathbb{S}_R^2 = \{w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p \mathbb{R}^3 : xw_1 + yw_2 + zw_3 = 0\}.$$

Παρατήρηση 6.1.1. Έστω S κανονική επιφάνεια και

$$X: U \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων της με παραμέτρους $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. Από τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten, εύκολα προκύπτει ότι

$$L_{X(u,v)} X_u(u, v) = -(N \circ X)_u(u, v)$$

και

$$L_{X(u,v)} X_v(u, v) = -(N \circ X)_v(u, v),$$

για κάθε $(u, v) \in U$. Χάρην συντομίας, θα γράφουμε τις ανωτέρω ισότητες ως

$$\boxed{LX_u = -N_u \quad \text{και} \quad LX_v = -N_v.}$$

Η ακόλουθη πρόταση μας διασφαλίζει μια ιδιότητα της απεικόνισης Weingarten η οποία είναι σημαντική για όλα όσα θα ακολουθήσουν.

Πρόταση 6.1.1. Η απεικόνιση Weingarten είναι αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός, δηλαδή για κάθε σημείο $p \in S$ και τυχόντα εφαπτόμενα διανύσματα $w_1, w_2 \in T_p S$ ισχύει

$$\langle L_p w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_1, L_p w_2 \rangle_p.$$

Απόδειξη. Αρχεί να αποδείξουμε την ανωτέρω ισότητα για τα διανύσματα μιας βάσης του εφαπτομένου επιπέδου $T_p S$. Αν

$$X: U \rightarrow S$$

είναι σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\langle LX_u, X_v \rangle = \langle X_u, LX_v \rangle,$$

ή ισοδύναμα

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

Όμως είναι

$$\begin{aligned} \langle N_u, X_v \rangle &= \langle N, X_v \rangle_u - \langle N, X_{uv} \rangle \\ &= -\langle N, X_{uv} \rangle, \end{aligned}$$

αφού προφανώς ισχύει

$$\langle N, X_v \rangle = 0.$$

Όμοια έχουμε

$$\begin{aligned} \langle X_u, N_v \rangle &= \langle N, X_u \rangle_v - \langle N, X_{vu} \rangle \\ &= -\langle N, X_{uv} \rangle \end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

6.2 Δεύτερη θεμελιώδης μορφή

Επειδή η απεικόνιση Weingarten είναι αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός, η απεικόνιση

$$B_p: T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$B_p(w_1, w_2) = \langle L_p w_1, w_2 \rangle_p, \quad w_1, w_2 \in T_p S,$$

είναι συμμετρική διγραμμική μορφή. Συνεπώς, ορίζεται η αντίστοιχη τετραγωνική της μορφή, η οποία είναι η λεγόμενη δεύτερη θεμελιώδης μορφή και η οποία διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην έξωθεν γεωμετρία της θεωρίας των επιφανειών.

Ορισμός 6.2.1. Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια. Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II_p της επιφάνειας S στο σημείο της p είναι η τετραγωνική μορφή

$$II_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p, \quad w \in T_p S.$$

Έστω

$$X: U \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων της κανονικής επιφάνειας S με παραμέτρους $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Ο πίνακας της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, ως τετραγωνικής μορφής, ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ του εφαπτομένου επιπέδου, είναι ο συμμετρικός πίνακας

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

όπου $e, f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι οι λείες συναρτήσεις

$$\begin{aligned} e &= \langle LX_u, X_u \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= \langle LX_u, X_v \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle, \\ g &= \langle LX_v, X_v \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές ως **θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης** της επιφάνειας ως προς το σύστημα συντεταγμένων X . Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή καθορίζεται πλήρως από τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης. Πράγματι, αν

$$w = aX_u + bX_v \in T_p S,$$

είναι τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα σε σημείο $p \in S$, τότε λαμβάνουμε

$$II_p(w) = ea^2 + 2fab + gb^2. \quad (6.1)$$

Σε αντίθεση με την πρώτη θεμελιώδη μορφή, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή δεν είναι πάντα οριστική, όπως φαίνεται στα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.2.1. Από το Παράδειγμα 6.1.1, γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση Weingarten στο τυχόν σημείο κάθε επιπέδου είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση.

Κατά συνέπεια, σε κάθε σημείο p του επιπέδου η δεύτερη θεμελιώδης του μορφή είναι

$$II_p = 0.$$

Παράδειγμα 6.2.2. Η απεικόνιση Weingarten του ορθού κυκλικού κυλίνδρου

$$C_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

του Παραδείγματος 6.1.2, στο τυχόν σημείο του $p \in C_r$, είναι η γραμμική απεικόνιση

$$L_p: T_p C_r \rightarrow T_p C_r$$

με

$$L_p w = \frac{1}{r} (w_1, w_2, 0), \quad w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p C_r.$$

Επομένως, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή του κυλίνδρου, στο τυχόν σημείο του $p \in C_r$, είναι

$$II_p(w) = \frac{1}{r} (w_1^2 + w_2^2).$$

Προφανώς, η II_p είναι θετικώς ημιοριστική.

Παράδειγμα 6.2.3. Η απεικόνιση Weingarten της σφαίρας

$$\mathbb{S}_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

του Παραδείγματος 3.1.4, στο τυχόν σημείο $p \in \mathbb{S}_R^2$, είναι η γραμμική απεικόνιση

$$L_p: T_p \mathbb{S}_R^2 \rightarrow T_p \mathbb{S}_R^2$$

με

$$L_p w = \frac{1}{R} w, \quad w \in T_p \mathbb{S}_R^2.$$

Επομένως, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της σφαίρας, στο τυχόν σημείο της $p \in \mathbb{S}_R^2$, είναι

$$II_p(w) = \frac{1}{R} \|w\|^2,$$

ή ισοδύναμα

$$II_p = \frac{1}{R} I_p.$$

Προφανώς, η II_p είναι θετικώς οριστική.

Πως σχετίζονται οι δεύτερες θεμελιώδεις μορφές δύο γεωμετρικώς ισότιμων επιφανειών; Η απάντηση δίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.2.1. Έστω S και \tilde{S} προσανατολισμένες επιφάνειες με δεύτερες θεμελιώδεις μορφές II και \tilde{II} , αντίστοιχα. Αν οι επιφάνειες S και \tilde{S} είναι γεωμετρικώς ισότιμες και $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι ισομετρία του \mathbb{R}^3 τέτοια ώστε $\tilde{S} = T(S)$, τότε ισχύει

$$\tilde{II}_{T(p)}(dT_p(w)) = \varepsilon II_p(w),$$

για κάθε σημείο $p \in S$ και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$, όπου $\varepsilon = 1$ αν η ισομετρία T διατηρεί τον προσανατολισμό, ενώ $\varepsilon = -1$ αν τον αντιστρέφει.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.2.1 και του ορισμού της δεύτερης θεμελιώδους μορφής. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι για τις απεικονίσεις Gauss N και \tilde{N} των επιφανειών S και \tilde{S} , αντίστοιχα, ισχύει

$$\tilde{N} \circ T = \varepsilon AN,$$

όπου A είναι το γραμμικό μέρος της ισομετρίας T και $\varepsilon = \pm 1$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας και επειδή $dT_p = A$, προκύπτει ότι

$$d\tilde{N}_{T(p)} \circ dT_p = \varepsilon A \circ dN_p.$$

Συνεπώς, από τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten, έχουμε ότι οι αντίστοιχες απεικονίσεις Weingarten L_p και $\tilde{L}_{T(p)}$, των επιφανειών S και \tilde{S} , συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\tilde{L}_{T(p)} \circ dT_p = \varepsilon A \circ L_p.$$

Επομένως, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{T(p)}(dT_p(w)) &= \langle \tilde{L}_{T(p)} \circ dT_p w, dT_p(w) \rangle \\ &= \varepsilon \langle A \circ L_p w, A w \rangle \\ &= \varepsilon \langle L_p w, w \rangle \\ &= \varepsilon H_p(w),\end{aligned}$$

για κάθε $w \in T_p S$, αφού $A \in O(3)$. □

6.3 Κάθετη καμπυλότητα

Στην παρούσα ενότητα εισάγουμε την έννοια της κάθετης καμπυλότητας για κανονικές επιφάνειες, μέσω της οποίας θα οριστούν στη συνέχεια οι δύο σημαντικές καμπυλότητες για τη θεωρία των επιφανειών.

Ορισμός 6.3.1. Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με δεύτερη θεμελιώδη μορφή H_p στο σημείο της p . Η κάθετη καμπυλότητα $k_n(w)$ της επιφάνειας S στην εφαπτομενική της διεύθυνση $w \in T_p S \setminus \{0\}$ είναι ο αριθμός

$$k_n(w) = \frac{H_p(w)}{I_p(w)}.$$

Έστω

$$X: U \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S με παραμέτρους $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. Αν

$$w = aX_u + bX_v$$

είναι μη μηδενικό εφαπτομενικό διάνυσμα, τότε από τις (4.2) και (6.1) λαμβάνουμε ότι η κάθετη καμπυλότητα είναι

$$k_n(w) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}.$$

Ειδικά, η κάθετη καμπυλότητα στην εφαπτομενική διεύθυνση των παραμετρικών καμπυλών του συστήματος συντεταγμένων X είναι

$$k_n(X_u) = \frac{e}{E} \text{ και } k_n(X_v) = \frac{g}{G}.$$

Είναι φανερό ότι ισχύει

$$k_n(\lambda w) = k_n(w), \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Συνεπώς, σε ότι αφορά την κάθετη καμπυλότητα, έχει νόημα να περιοριζόμαστε μόνο σε μοναδιαία εφαπτομενικά διανύσματα.

Έστω μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα $w \in T_p S$. Θεωρούμε επιφανειακή καμπύλη

$$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$$

της επιφάνειας S με παράμετρο το μήκος τόξου,

$$c(0) = p \in S \text{ και } c'(0) = w.$$

Τότε, από τον ορισμό της δεύτερης θεμελιώδους μορφής και της απεικόνισης Weingarten, έχουμε

$$\begin{aligned} II_p(w) &= \langle L_p w, w \rangle_p \\ &= -\langle dN_p(w), w \rangle_p \\ &= -\langle (N \circ c)'(0), c'(0) \rangle \\ &= \langle (N \circ c)(0), c''(0) \rangle. \end{aligned}$$

Αν επιπλέον, η καμπύλη c έχει θετική καμπυλότητα k και κύριο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \vec{n} , τότε λαμβάνουμε

$$II_p(w) = k(0) \langle N(p), \vec{n}(0) \rangle.$$

Από αυτή προκύπτει ότι για την κάθετη καμπυλότητα ισχύει

$$k_n(w) = k(0) \cos \theta,$$

όπου θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $N(p)$ και $\vec{n}(0)$.

Αν επιλέξουμε ως καμπύλη c να είναι η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο p και είναι παράλληλο

προς τα μοναδιαία και ορθογώνια μεταξύ τους διανύσματα $N(p)$ και w , τότε βρίσκουμε ότι

$$k_n(w) = \pm k(0).$$

Η ισότητα αυτή δίνει τη γεωμετρική ερμηνεία της κάθετης καμπυλότητας.

Έχουμε επομένως αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.3.1 (Meusnier). Όλες οι κανονικές επιφανειακές καμπύλες μιας κανονικής επιφάνειας S , οι οποίες έχουν σε ένα κοινό σημείο τους $p \in S$ την ίδια εφαπτόμενη ευθεία, έχουν σε αυτό το σημείο την ίδια κάθετη καμπυλότητα για την κοινή τους εφαπτομενική διεύθυνση.

6.4 Κύριες καμπυλότητες

Σημαντικό ρόλο στη θεωρία των επιφανειών διαδραματίζουν οι λεγόμενες κύριες καμπυλότητες.

Ορισμός 6.4.1. Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια και $p \in S$ τυχόν σημείο αυτής. Οι κύριες καμπυλότητες $k_1(p), k_2(p)$ της επιφάνειας S στο σημείο της p είναι οι αριθμοί

$$k_1(p) = \max \{k_n(w) : w \in T_p S \text{ με } \|w\| = 1\}$$

και

$$k_2(p) = \min \{k_n(w) : w \in T_p S \text{ με } \|w\| = 1\}.$$

Τονίζουμε ότι ο ανωτέρω ορισμός είναι καλός. Πράγματι, το υποσύνολο

$$\{w \in T_p S : \|w\| = 1\}$$

του εφαπτομένου επιπέδου της επιφάνειας στο σημείο της p είναι συμπαγές υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , αφού πρόκειται για το μοναδιαίο κύκλο κέντρου p ο οποίος περιέχεται στο επίπεδο $T_p S$. Επιπλέον, η κάθετη καμπυλότητα είναι συνεχής ως συνάρτηση του τυχόντος $w \in T_p S$. Πράγματι, αν

$$X: U \rightarrow S$$

είναι σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ και

$$w = aX_u + bX_v$$

είναι μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, τότε είναι

$$k_n(w) = ea^2 + 2fab + gb^2,$$

δηλαδή είναι συνεχής συνάρτηση του ζεύγους (a, b) . Είναι γνωστό ότι, κάθε συνεχής συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού είναι συμπαγές σύνολο λαμβάνει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο. Συνεπώς, οι κύριες καμπυλότητες είναι καλώς ορισμένες.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, ορίζονται οι συναρτήσεις

$$k_1: S \rightarrow \mathbb{R} \text{ και } k_2: S \rightarrow \mathbb{R}$$

γνωστές ως κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας S .

Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση Weingarten αλλάζει πρόσημο αν αλλάξει ο προσανατολισμός. Αυτό έχει ως συνέπεια οι κύριες καμπυλότητες επίσης να αλλάζουν πρόσημο όταν, αλλάζει ο προσανατολισμός.

Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.1, η απεικόνιση Weingarten είναι αυτοπροσηρητημένος γραμμικός μετασχηματισμός. Όμως είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι κάθε αυτοπροσηρητημένος γραμμικός μετασχηματισμός έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Το ακόλουθο θεώρημα μας δείχνει ότι οι ιδιοτιμές της απεικόνισης Weingarten είναι ακριβώς οι κύριες καμπυλότητες.

Θεώρημα 6.4.1. (i) Οι κύριες καμπυλότητες $k_1(p), k_2(p)$, μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S στο τυχόν σημείο της p , είναι οι ιδιοτιμές της απεικόνισης Weingarten

$$L_p: T_pS \rightarrow T_pS.$$

(ii) Υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1(p), e_2(p)\}$ του εφαπτομένου επιπέδου T_pS αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Weingarten L_p , δηλαδή ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες

$$L_p e_1(p) = k_1(p) e_1(p) \text{ και } L_p e_2(p) = k_2(p) e_2(p).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 6.1.1 και του Θεωρήματος Δ'.0.2. \square

Τα εφαπτόμενα διανύσματα $e_1(p), e_2(p) \in T_p S$, στην ανωτέρω πρόταση, αναφέρονται ως κύριες διευθύνσεις της επιφάνειας S στο σημείο της p .

Είναι προφανές ότι οι κύριες καμπυλότητες κάθε επιπέδου (Παράδειγμα 6.1.1) είναι

$$k_1 = k_2 = 0$$

παντού.

Οι κύριες καμπυλότητες του ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας r (Παράδειγμα 6.1.2) είναι

$$k_1 = \frac{1}{r} \text{ και } k_2 = 0.$$

Οι κύριες καμπυλότητες της σφαίρας \mathbb{S}_R^2 ακτίνας R (Παράδειγμα 6.1.3) είναι

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}.$$

Στην ακόλουθη πρόταση, δίνεται ένας τρόπος υπολογισμού της κάθετης καμπυλότητας σε οποιαδήποτε εφαπτομενική διεύθυνση, συναρτήσει των κυρίων καμπυλοτήτων. Ο τύπος ο οποίος ακολουθεί είναι γνωστός ως τύπος του Euler.

Πρόταση 6.4.2. Αν $k_1(p), k_2(p)$ είναι οι κύριες καμπυλότητες μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S στο σημείο της p , με αντίστοιχες κύριες διευθύνσεις την ορθομοναδιαία βάση $\{e_1(p), e_2(p)\}$, τότε για κάθε μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$ με

$$w = \cos \theta e_1(p) + \sin \theta e_2(p),$$

η κάθετη καμπυλότητα στη διεύθυνση w δίνεται από την ισότητα

$$k_n(w) = k_1(p) \cos^2 \theta + k_2(p) \sin^2 \theta.$$

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 6.4.1, έχουμε

$$\begin{aligned} k_n(w) &= II_p(w) \\ &= \langle L_p(w), w \rangle \\ &= \langle \cos \theta L_p e_1(p) + \sin \theta L_p e_2(p), \cos \theta e_1(p) + \sin \theta e_2(p) \rangle \\ &= \langle k_1(p) \cos \theta e_1(p) + k_2(p) \sin \theta e_2(p), \cos \theta e_1(p) + \sin \theta e_2(p) \rangle \\ &= k_1(p) \cos^2 \theta + k_2(p) \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του τύπου του Euler. \square

6.5 Καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα

Μέσω των κυρίων καμπυλοτήτων ορίζονται δύο σημαντικές καμπυλότητες για τη θεωρία των επιφανειών, τις καλούμενες καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα.

Ορισμός 6.5.1. Η καμπυλότητα Gauss K και η μέση καμπυλότητα H μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S είναι αντίστοιχα οι συναρτήσεις

$$K: S \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } K = k_1 k_2$$

και

$$H: S \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2).$$

Προφανώς για κάθε $p \in S$ έχουμε

$$K(p) = \det L_p$$

και

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{trace } L_p,$$

όπου

$$L_p: T_p S \rightarrow T_p S$$

είναι η απεικόνιση Weingarten της επιφάνειας S στο σημείο της p . Θυμίζουμε ότι η ορίζουσα και το ίχνος είναι οι αναλλοίωτες κάθε γραμμικού ενδομορφισμού τυχόντος 2-διάστατου διανυσματικού χώρου.

Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση Weingarten αλλάζει πρόσημο, αν αλλάξει ο προσανατολισμός. Αυτό έχει ως συνέπεια η μέση καμπυλότητα επίσης να αλλάζει πρόσημο, σε αντίθεση με την καμπυλότητα Gauss η οποία παραμένει αναλλοίωτη.

Είναι γνωστό ότι οι κύριες καμπυλότητες κάθε επιπέδου (Παράδειγμα 6.1.1) είναι

$$k_1 = k_2 = 0$$

παντού. Συνεπώς, η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα κάθε επιπέδου είναι

$$K = H = 0.$$

Οι κύριες καμπυλότητες του ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας r (Παράδειγμα 6.1.2) είναι

$$k_1 = \frac{1}{r} \text{ και } k_2 = 0.$$

Συνεπώς, η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα του ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας r είναι αντίστοιχα

$$K = 0 \text{ και } H = \frac{1}{2r}.$$

Οι κύριες καμπυλότητες της σφαίρας \mathbb{S}_R^2 ακτίνας R (Παράδειγμα 6.1.3) είναι

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}.$$

Επομένως, η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα κάθε σφαίρας ακτίνας R είναι αντίστοιχα

$$K = \frac{1}{R^2} \text{ και } H = \frac{1}{R}.$$

Πρόταση 6.5.1. Έστω S και \tilde{S} προσανατολισμένες επιφάνειες με κύριες καμπυλότητες $k_1, k_2, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2$, καμπυλότητες Gauss K, \tilde{K} και μέση καμπυλότητα H, \tilde{H} , αντίστοιχα. Αν οι επιφάνειες S και \tilde{S} είναι γεωμετρικώς ισοτιμες και $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι ισομετρία του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 με $\tilde{S} = T(S)$, τότε ισχύει

$$\tilde{k}_i \circ T = \varepsilon k_i, \quad i = 1, 2,$$

και

$$\tilde{K} \circ T = K, \quad \tilde{H} \circ T = \varepsilon H,$$

όπου $\varepsilon = 1$ ή $\varepsilon = -1$ αν η ισομετρία T διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 6.2.1 και του ορισμού της δεύτερης θεμελιώδους μορφής. \square

Η ακόλουθη πρόταση μας εξασφαλίζει ένα τρόπο υπολογισμού της καμπυλότητας Gauss και της μέσης καμπυλότητας, χωρίς να απαιτείται γνώση των κυρίων καμπυλοτήτων.

Πρόταση 6.5.2. Έστω προσανατολισμένη επιφάνεια S και

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων αυτής με παραμέτρους $(u, v) \in U$. Στην περιοχή συντεταγμένων $X(U)$, η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα δίνονται από τις σχέσεις

$$K \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (6.2)$$

και

$$H \circ X = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}. \quad (6.3)$$

Απόδειξη. Έστω $A = (a_{ij})$ ο πίνακας της απεικόνισης Weingarten ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ του εφαπτομένου επιπέδου. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} LX_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ LX_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας στις ανωτέρω σχέσεις τα εσωτερικά γινόμενα με τα διανύσματα της βάσης $\{X_u, X_v\}$ του εφαπτομένου επιπέδου, βρίσκουμε ότι ο πίνακας A πληροί την ισότητα

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

ή ισοδύναμα

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Όμως για την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα είναι

$$K \circ X = \det L = \det A$$

και

$$H \circ X = \frac{1}{2} \text{trace } L = \frac{1}{2} \text{trace } A.$$

Μετά από άμεσο υπολογισμό, λαμβάνουμε τις ζητούμενες ισότητες (6.2) και (6.3). \square

Μια άμεση συνέπεια της ανωτέρω πρότασης είναι το γεγονός ότι η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα είναι λείες συναρτήσεις. Επιπλέον, από τον ορισμό τους προκύπτει ότι ισχύει η ισότητα

$$H^2 - K = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}.$$

Άμεσα συμπεραίνουμε ότι ισχύει, σε κάθε σημείο, η ανισότητα

$$H^2 \geq K.$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι η ισότητα $H^2 = K$ ισχύει μόνο σε εκείνα τα σημεία όπου οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες.

Επιπλέον, οι κύριες καμπυλότητες είναι οι ρίζες του τριωνύμου

$$P(t) = (t - k_1)(t - k_2) = t^2 - 2Ht + K.$$

Προφανώς, το τριώνυμο $P(t)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της απεικόνισης Weingarten. Επομένως, οι κύριες καμπυλότητες δίνονται,

6.5. ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ GAUSS ΚΑΙ ΜΕΣΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ

συναρτήσει της καμπυλότητας Gauss και της μέσης καμπυλότητας, από τις σχέσεις

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

και

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

Είναι φανερό ότι οι κύριες καμπυλότητες είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα μιας επιφάνειας γραφήματος Γ_h (Παράδειγμα 5.2.1) τυχούσας λείας συνάρτησης

$$h: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

δίνονται αντίστοιχα από τις ισότητες

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}$$

και

$$H = \frac{(1 + h_y^2)h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_x^2)h_{yy}}{2(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}}.$$

Οι ανωτέρω ισότητες προκύπτουν από την Πρόταση 6.5.2, αφού τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης της επιφάνειας Γ_h , ως προς το σύστημα συντεταγμένων

$$X(x, y) = (x, y, h(x, y)),$$

είναι αντίστοιχα

$$E = 1 + h_x^2,$$

$$F = h_x h_y,$$

$$G = 1 + h_y^2$$

και

$$\begin{aligned} e &= \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}, \\ f &= \frac{h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}, \\ g &= \frac{h_{yy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο είναι

$$N: \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$N = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}.$$

Παράδειγμα 6.5.1 (Εκ περιστροφής επιφάνειες). Έστω

$$c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

μια καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ και παραμετρική παράσταση

$$c(s) = (\phi(s), 0, \psi(s)),$$

τέτοια ώστε $\phi(s) > 0$ για κάθε $s \in I$.

Γνωρίζουμε (Παράδειγμα 3.5.1) ότι η παραμετρική επιφάνεια

$$X: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(s, \theta) = (\phi(s) \cos \theta, \phi(s) \sin \theta, \psi(s))$$

είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια.

Η εικόνα της είναι η εκ περιστροφής επιφάνεια, η οποία παράγεται από περιστροφή της εικόνας της καμπύλης c γύρω από τον άξονα Oz .

Άμεσα διαπιστώνεται ότι θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης δίνονται ως εξής

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \phi^2.$$

Επιπλέον, η απεικόνιση Gauss είναι

$$N = \frac{X_s \times X_\theta}{\|X_s \times X_\theta\|} = (-\dot{\psi} \cos \theta, -\dot{\psi} \sin \theta, \dot{\phi}),$$

ενώ τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης είναι

$$e = \phi\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\phi}, \quad f = 0, \quad g = \phi\dot{\psi}.$$

Επειδή η καμπύλη c έχει παράμετρο το μήκος τόξου ισχύει

$$\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 = 1,$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\psi}\ddot{\psi} = 0.$$

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 6.5.2, μετά από απλές πράξεις βρίσκουμε ότι η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα δίνονται αντίστοιχα από τις ισότητες

$$K = -\frac{\ddot{\phi}}{\phi}$$

και

$$H = \frac{-\dot{\psi} + \phi(\dot{\psi}\ddot{\phi} - \dot{\psi}\ddot{\phi})}{2\phi}.$$

Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι

$$N_s = -kX_s$$

και

$$N_\theta = -\frac{\dot{\psi}}{\phi}X_\theta,$$

όπου k είναι η καμπυλότητα της καμπύλης c ως καμπύλης του επιπέδου \mathbb{R}^2 (το οποίο ταυτίζουμε με το επίπεδο συντεταγμένων Oxz).

Συνεπώς, οι κύριες καμπυλότητες της εκ περιστροφής επιφάνειας είναι οι συναρτήσεις k και $\dot{\psi}/\phi$.

Αξίζει να αναφερθεί ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε εκ περιστροφής επιφάνειες με σταθερή καμπυλότητα Gauss K . Πράγματι, αρκεί να επιλέξουμε ως συνάρτηση ϕ μια θετική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$\ddot{\phi} + K\phi = 0$$

και ως συνάρτηση ψ τη συνάρτηση

$$\psi(s) = \int \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} ds.$$

Για $K = 1$, μπορούμε να επιλέξουμε $\phi(s) = \alpha \cos s$, όπου α είναι θετική σταθερά. Τότε

$$\psi(s) = \int_0^s \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \sigma} d\sigma.$$

Αν $\alpha = 1$, τότε η επιφάνεια την οποία λαμβάνουμε είναι προφανώς η μοναδιαία σφαίρα \mathbb{S}^2 .

Οι επιφάνειες που προκύπτουν για $\alpha \neq 1$ δεν είναι η σφαίρα \mathbb{S}^2 , αλλά επιφάνειες τοπικά ισομετρικές με αυτή (άσκηση). Σημειώνουμε ότι αν $\alpha < 1$, τότε η καμπύλη

$$c(s) = (\phi(s), 0, \psi(s))$$

ορίζεται για $s \in (-\pi/2, \pi/2)$, ενώ αν $\alpha > 1$, τότε ορίζεται για $s \in (-\pi/2 + s_0, \pi/2 - s_0)$, όπου $s_0 \in (0, \pi/2)$ με $\sin s_0 = 1/\alpha$.

6.6 Ελλειπτικά-υπερβολικά-παραβολικά-ισόπεδα-ομφαλικά σημεία

Στη συνέχεια, θα προβούμε στην ταξινόμηση των σημείων μιας επιφάνειας. Έστω p σημείο μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S . Θεωρούμε το υποσύνολο του εφαπτομένου επιπέδου

$$\mathcal{D}(p) = \{w \in T_p S : II_p(w) = \pm 1\},$$

το οποίο είναι γνωστό ως **δεικνύουσα Dupin** της επιφάνειας S στο σημείο της p .

Αν $e_1(p)$, $e_2(p)$ είναι οι κύριες διευθύνσεις της επιφάνειας στο σημείο p , τότε το τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pS$ γράφεται ως

$$w = xe_1(p) + ye_2(p).$$

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 6.4.1, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} II_p(w) &= \langle L_p w, w \rangle \\ &= \langle L_p (xe_1(p) + ye_2(p)), xe_1(p) + ye_2(p) \rangle \\ &= \langle xL_p(e_1(p)) + yL_p(e_2(p)), xe_1(p) + ye_2(p) \rangle \\ &= \langle xk_1(p)e_1(p) + yk_2(p)e_2(p), xe_1(p) + ye_2(p) \rangle, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$II_p(w) = k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2.$$

Τούτο σημαίνει ότι η δεικνύουσα Dupin είναι μια κωνική τομή η οποία περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pS . Ανάλογα με το είδος αυτής της κωνικής τομής, ταξινομούμε τα σημεία της επιφάνειας ως ακολούθως.

Ορισμός 6.6.1. Ένα σημείο p μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S καλείται:

- **Ελλειπτικό σημείο** αν η δεικνύουσα Dupin $\mathcal{D}(p)$ είναι έλλειψη, ή ισοδύναμα η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II_p είναι είτε θετικά, είτε αρνητικά οριστική.
- **Υπερβολικό σημείο** αν η δεικνύουσα Dupin $\mathcal{D}(p)$ είναι υπερβολή, ή ισοδύναμα αν η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II_p είναι αόριστη.
- **Παραβολικό σημείο** αν η δεικνύουσα Dupin $\mathcal{D}(p)$ είναι ζεύγος παραλλήλων ευθειών, ή ισοδύναμα αν η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II_p είναι είτε θετικά, είτε αρνητικά ημιοριστική.
- **Ισόπεδο σημείο** αν η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II_p είναι μηδέν.

- **Ομφαλικό σημείο** αν η δεικνύουσα Dupin $\mathcal{D}(p)$ είναι κύκλος, ή ισοδύναμα αν η πρώτη και δεύτερη θεμελιώδεις μορφές πληρούν τη συνθήκη $II_p = \lambda I_p$ για κάποιο αριθμό $\lambda \neq 0$.

Όλα τα σημεία κάθε επιπέδου (Παράδειγμα 6.2.1) είναι ισόπεδα, ενώ όλα τα σημεία του ορθού κυκλικού κυλίνδρου (Παράδειγμα 6.2.2) είναι παραβολικά. Επιπλέον, όλα τα σημεία τυχούσας σφαίρας (Παράδειγμα 6.2.3) είναι ομφαλικά.

Η ακόλουθη πρόταση προκύπτει άμεσα από τον ανωτέρω ορισμό, καθώς και τον ορισμό της καμπυλότητας Gauss και της μέσης καμπυλότητας.

Πρόταση 6.6.1. Ένα σημείο p μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S είναι:

- **Ελλειπτικό** αν και μόνο αν για την καμπυλότητα Gauss ισχύει $K(p) > 0$.
- **Υπερβολικό** αν και μόνο αν για την καμπυλότητα Gauss ισχύει $K(p) < 0$.
- **Παραβολικό** αν και μόνο για την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα ισχύει $K(p) = 0$ και $H(p) \neq 0$.
- **Ισόπεδο** αν και μόνο αν για την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα ισχύει $K(p) = 0 = H(p)$, ή ισοδύναμα για τις κύριες καμπυλότητες $k_1(p) = k_2(p) = 0$.
- **Ομφαλικό** αν και μόνο αν για την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα ισχύει $H^2(p) = K(p) > 0$, ή ισοδύναμα $k_1(p) = k_2(p) \neq 0$, ή ισοδύναμα στο σημείο p τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης, ως προς κάθε σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας, πληρούν τη συνθήκη¹

$$e = \lambda E, \quad f = \lambda F, \quad g = \lambda G \quad \text{για κάποιο αριθμό } \lambda \neq 0.$$

¹Συχνά και καταχρηστικά, αυτή η συνθήκη γράφεται στη μορφή

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = \lambda \neq 0,$$

όπου βέβαια αν $F = 0$, τότε πρέπει και $f = 0$.

Σημειώνουμε πως τα ομφαλικά σημεία είναι εξ ορισμού και ελλειπτικά σημεία.

Πρόταση 6.6.2. Έστω σημείο p κανονικής επιφάνειας S .

(i) Αν το σημείο p είναι ελλειπτικό, τότε υπάρχει περιοχή V του p στην επιφάνεια S , η οποία περιέχεται σε έναν από τους δύο ημιχώρους με ακμή το εφαπτόμενο επίπεδο T_pS και μάλιστα ισχύει $V \cap T_pS = \{p\}$.

(ii) Αν το σημείο p είναι υπερβολικό, τότε κάθε περιοχή V του p στην επιφάνεια S περιέχει σημεία και των δύο ημιχώρων με ακμή το εφαπτόμενο επίπεδο T_pS .

Απόδειξη. Έστω

$$X: U \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας S με παραμέτρους $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ και $p = X(u_0, v_0)$.

Θεωρούμε τη λεία συνάρτηση $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(u, v) = \langle X(u, v) - X(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0) \rangle,$$

όπου N είναι η απεικόνιση Gauss της επιφάνειας S . Παρατηρούμε ότι

$$h_u(u_0, v_0) = \langle X_u(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0) \rangle = 0,$$

$$h_v(u_0, v_0) = \langle X_v(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0) \rangle = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο (u_0, v_0) είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης h .

Επιπλέον έχουμε

$$h_{uu}(u_0, v_0) = \langle X_{uu}(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0) \rangle = e(u_0, v_0),$$

$$h_{uv}(u_0, v_0) = \langle X_{uv}(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0) \rangle = f(u_0, v_0),$$

$$h_{vv}(u_0, v_0) = \langle X_{vv}(u_0, v_0), N \circ X(u_0, v_0) \rangle = g(u_0, v_0).$$

Επομένως, ο Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης h στο (u_0, v_0) είναι ο πίνακας της δεύτερης θεμελιώδους μορφής στο σημείο p ως προς τη βάση $\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\}$ του εφαπτομένου επιπέδου T_pS .

(i) Αν το σημείο p είναι ελλειπτικό, τότε από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι ο Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης h στο κρίσιμο της σημείο (u_0, v_0) είναι θετικά οριστικός ή αρνητικά οριστικός. Συνεπώς, η συνάρτηση h λαμβάνει γνήσιο τοπικό ελάχιστο ή γνήσιο τοπικό μέγιστο $h(u_0, v_0) = 0$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του μέρους (i).

(ii) Αν το σημείο p είναι υπερβολικό, συμπεραίνουμε ότι ο Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης h στο (u_0, v_0) είναι αόριστος. Επομένως, σε κάθε περιοχή του (u_0, v_0) υπάρχουν σημεία στα οποία η συνάρτηση h λαμβάνει τιμή μεγαλύτερη της τιμής $h(u_0, v_0) = 0$ και σημεία στα οποία λαμβάνει τιμή μικρότερη της τιμής $h(u_0, v_0) = 0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Σημειώνουμε ότι δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το σχήμα μιας επιφάνειας κοντά σε παραβολικά ή ισόπεδα σημεία. Πράγματι, το σημείο $O(0, 0, 0)$ είναι ισόπεδο σημείο των επιφανειών γραφημάτων Γ_{h_1} και Γ_{h_2} των συναρτήσεων $h_1, h_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h_1(x, y) = x^3 + y^3 \text{ και } h_2(x, y) = x^4 + y^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο και των δύο επιφανειών στο σημείο $O(0, 0, 0)$ είναι το επίπεδο Oxy . Παρατηρούμε όμως ότι η επιφάνεια Γ_{h_2} περιέχεται στον ημιχώρο με ακμή το επίπεδο Oxy , ενώ αντιθέτως σημεία της επιφάνειας Γ_{h_1} περιέχονται εκατέρωθεν του επιπέδου Oxy .

Είναι γνωστό ότι οι κύριες καμπυλότητες κάθε επιπέδου (Παράδειγμα 6.1.1) είναι

$$k_1 = k_2 = 0$$

παντού, ενώ αυτές της σφαίρας ακτίνας R (Παράδειγμα 6.1.3) είναι

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$$

ως προς το εσωτερικό της κάθετο.

Το ακόλουθο θεώρημα μας λέει ότι τα επίπεδα και οι σφαίρες είναι οι μόνες κανονικές επιφάνειες των οποίων οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες σε κάθε σημείο, ή ισοδύναμα ισχύει $H^2 = K$ σε κάθε σημείο.

Θεώρημα 6.6.3. Έστω S συνεκτική κανονική επιφάνεια της οποίας οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες σε κάθε σημείο. Τότε η επιφάνεια S είναι είτε τμήμα επιπέδου είτε τμήμα σφαίρας.

Απόδειξη. Θέτουμε $\lambda = k_1 = k_2$. Τότε από το Θεώρημα 6.4.1 προκύπτει ότι η απεικόνιση Weingarten είναι

$$L_p = \lambda(p)Id_p$$

σε κάθε σημείο $p \in S$, όπου Id_p είναι η ταυτοτική απεικόνιση του εφαπτομένου επιπέδου $T_p S$. Η συνάρτηση

$$\lambda: S \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι λεία, αφού ισχύει

$$\lambda(p) = \frac{1}{2} \text{trace } L_p = H(p)$$

για κάθε σημείο $p \in S$.

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων $X: U \rightarrow S$ της επιφάνειας με παραμέτρους $(u, v) \in U$, όπου U ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Τότε, λόγω της υπόθεσης και ανακαλώντας τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten, έχουμε

$$\begin{aligned} -(N \circ X)_u &= \lambda X_u \\ -(N \circ X)_v &= \lambda X_v, \end{aligned}$$

όπου N είναι η απεικόνιση Gauss της επιφάνειας S . Επειδή είναι

$$(N \circ X)_{uv} = (N \circ X)_{vu} \text{ και } X_{uv} = X_{vu},$$

από τις ανωτέρω ισότητες βρίσκουμε ότι

$$(\lambda \circ X)_v X_u - (\lambda \circ X)_u X_v = 0 \text{ στο } U,$$

ή ισοδύναμα

$$(\lambda \circ X)_v = (\lambda \circ X)_u = 0 \text{ στο } U.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$d\lambda(X_u) = 0 = d\lambda(X_v)$$

και επομένως το διαφορικό της συνάρτησης λ είναι

$$d\lambda_p = 0 \text{ για κάθε σημείο } p \in S.$$

Συνεπώς, λόγω της Πρότασης 3.4.2, η συνάρτηση λ είναι σταθερή. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

Έστω ότι είναι $\lambda = 0$. Τότε έχουμε

$$dN_p = 0 \text{ για κάθε σημείο } p \in S.$$

Λόγω του Πορίσματος 3.4.3, συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση Gauss N είναι σταθερή.

Θεωρούμε τη λεία συνάρτηση $h: S \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(p) = \langle p, N \rangle, \quad p \in S.$$

Επειδή ισχύει $L_p = 0$ για κάθε σημείο $p \in S$, εύκολα διαπιστώνεται ότι το διαφορικό της συνάρτησης h είναι

$$dh_p = 0 \text{ για κάθε σημείο } p \in S.$$

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 3.4.2, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση h είναι σταθερή. Συνεπώς, η επιφάνεια S περιέχεται σε επίπεδο ορθογώνιο στο σταθερό διάνυσμα N .

Υποθέτουμε τώρα ότι είναι $\lambda \neq 0$. Θεωρούμε τη λεία απεικόνιση

$$\Phi: S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$\Phi(p) = N(p) + \lambda p, \quad p \in S,$$

δηλαδή την απεικόνιση

$$\Phi = N + \lambda I,$$

όπου $I = Id|_S$ είναι ο περιορισμός της ταυτοτικής απεικόνισης

$$Id: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Από τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten και επειδή η συνάρτηση λ είναι σταθερή, προκύπτει ότι το διαφορικό της σε κάθε σημείο $p \in S$ είναι

$$\begin{aligned} d\Phi_p &= dN_p + \lambda Id_p \\ &= -L_p + \lambda Id_p \\ &= 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, βάσει του Πορίσματος 3.4.3, η απεικόνιση Φ είναι σταθερή. Έστω $\Phi(p) = p_0$ για κάθε σημείο $p \in S$, όπου p_0 είναι σταθερό σημείο του Ευκλειδείου χώρου. Τότε προφανώς ισχύει

$$d\left(p, \frac{1}{\lambda}p_0\right) = \left\| \frac{1}{\lambda}N(p) \right\| = \frac{1}{|\lambda|},$$

το οποίο δηλώνει ότι η επιφάνεια S περιέχεται σε σφαίρα κέντρου $\frac{1}{\lambda}p_0$ και ακτίνας $1/|\lambda|$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

6.7 Ασυμπτωτικές διευθύνσεις-ασυμπτωτικές καμπύλες

Στην παρούσα ενότητα εξετάζουμε εξέχουσες εφαπτομενικές διευθύνσεις μιας κανονικής επιφάνειας.

Ορισμός 6.7.1. • Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S \setminus \{0\}$ στο σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας S καλείται **ασυμπτωτική διεύθυνση** της S στο p , αν η κάθετη καμπυλότητα στη διεύθυνση w είναι $k_n(w) = 0$ ή ισοδύναμα $II_p(w) = 0$.

- Μια κανονική επιφανειακή καμπύλη $c: I \rightarrow S$ καλείται **ασυμπτωτική καμπύλη** (ή **ασυμπτωτική γραμμή**) της επιφάνειας S , αν το διάνυσμα ταχύτητάς της $c'(t)$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση για κάθε $t \in I$.

Έστω

$$X: U \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων κανονικής επιφάνειας S με παραμέτρους $(u, v) \in U$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Θεωρούμε σημείο $p \in X(U)$ και εφαπτόμενο διάνυσμα

$$w = aX_u + bX_v \in T_pS \setminus \{0\}.$$

Το διάνυσμα w είναι ασυμπτωτική διεύθυνση της επιφάνειας S στο σημείο p αν $II_p(w) = 0$, ή ισοδύναμα αν ισχύει

$$\boxed{ea^2 + 2fab + gb^2 = 0}, \quad (6.5)$$

όπου τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης e, f, g υπολογίζονται στο σημείο $X^{-1}(p)$.

Είναι φανερό ότι για να έχει λύση η δευτεροβάθμια εξίσωση (6.5) ως προς $(a, b) \neq (0, 0)$ (ή ισοδύναμα ως προς τους λόγους a/b ή b/a) πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$eg - f^2 \leq 0,$$

ή ισοδύναμα η καμπυλότητα Gauss να πληροί

$$K(p) \leq 0.$$

Συνεπώς αποδείξαμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 6.7.1. Σε ένα σημείο p κανονικής επιφάνειας S υπάρχουν ασυμπτωτικές διευθύνσεις αν και μόνο αν το σημείο είναι υπερβολικό, παραβολικό ή ισόπεδο.

Ακριβέστερα, στο τυχόν σημείο $p \in S$ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

- υπάρχουν δύο ακριβώς ασυμπτωτικές διευθύνσεις αν και μόνο αν το σημείο p είναι υπερβολικό σημείο,
- υπάρχει μία ακριβώς ασυμπτωτική διεύθυνση αν και μόνο αν το σημείο p είναι παραβολικό, και

- υπάρχουν περισσότερες από δύο ασυμπτωτικές διευθύνσεις αν και μόνο αν το σημείο p είναι ισόπεδο. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε εφαπτομενική διεύθυνση στο σημείο p είναι ασυμπτωτική διεύθυνση.

Είναι φανερό ότι μια κανονική επιφανειακή καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

είναι ασυμπτωτική καμπύλη της κανονικής επιφάνειας S αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $u(t), v(t)$ πληρούν την αλγεβρο-διαφορική εξίσωση

$$\boxed{e(u'(t))^2 + 2fu'(t)v'(t) + g(v'(t))^2 = 0} \quad (6.6)$$

για κάθε $t \in I$, όπου χάριν συντομίας έχουμε θέσει

$$e = e(u(t), v(t)), \quad f = f(u(t), v(t)), \quad g = g(u(t), v(t)).$$

Πρόταση 6.7.2. Έστω κανονική επιφάνεια S και

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων αυτής με παραμέτρους $(u, v) \in U$.

(i) Αν οι παραμετρικές καμπύλες του συστήματος συντεταγμένων X είναι ασυμπτωτικές καμπύλες της επιφάνειας S , τότε ισχύει

$$\boxed{e = g = 0 \text{ στο } U.} \quad (6.7)$$

(ii) Αν όλα τα σημεία της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$ είναι υπερβολικά και ισχύει η συνθήκη (6.7), τότε οι ασυμπτωτικές καμπύλες της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$ είναι ακριβώς οι παραμετρικές καμπύλες του συστήματος συντεταγμένων X .

Απόδειξη. (i) Γνωρίζουμε ότι η κάθετη καμπυλότητα στην εφαπτομενική διεύθυνση των παραμετρικών καμπυλών του συστήματος συντεταγμένων X είναι

$$k_n(X_u) = \frac{e}{E} \quad \text{και} \quad k_n(X_v) = \frac{g}{G}.$$

Αν οι παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές καμπύλες της επιφάνειας S , τότε τα ζεύγη των συναρτήσεων

$$u(t) = t, v(t) = v_0$$

και

$$u(t) = u_0, v(t) = t$$

είναι λύσεις της εξίσωσης (6.6), απ' όπου άμεσα προκύπτει η συνθήκη (6.7).

(ii) Ας υποθέσουμε τώρα ότι όλα τα σημεία της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$ είναι υπερβολικά και ότι ισχύει η συνθήκη (6.7). Λόγω της υπόθεσης, το θεμελιώδες ποσό δευτέρας τάξης f δεν μηδενίζεται πουθενά.

Τότε, από την εξίσωση (6.6) βρίσκουμε ότι η κανονική επιφανειακή καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

είναι ασυμπτωτική καμπύλη αν

$$u'(t)v'(t) = 0,$$

ή ισοδύναμα $u'(t) = 0$ ή $v'(t) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη c είναι παραμετρική καμπύλη του συστήματος συντεταγμένων X . \square

Αναφέρουμε το ακόλουθο θεώρημα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 6.7.3. Έστω κανονική επιφάνεια S , της οποίας όλα τα σημεία είναι υπερβολικά. Τότε για κάθε σημείο της p , υπάρχει σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S,$$

με $p \in X(U)$, του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές καμπύλες.

Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο ανωτέρω θεώρημα, θα αναφέρεται συχνά ως σύστημα ασυμπτωτικών γραμμών ή σύστημα ασυμπτωτικών καμπυλών.

Παράδειγμα 6.7.1. Θεωρούμε την επιφάνεια S με εξίσωση

$$z = x^2 - y^2.$$

Είναι προφανώς επιφάνεια γράφημα της συνάρτησης

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h(x, y) = x^2 - y^2.$$

Τα θεμελιώδη ποσά δευτέρας τάξης ως προς το σύστημα συντεταγμένων $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ με

$$X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

είναι

$$e(u, v) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}},$$

$$f(u, v) = 0,$$

και

$$g(u, v) = -\frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}.$$

Επειδή ισχύει

$$e(u, v)g(u, v) - f^2(u, v) < 0$$

για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, συμπεραίνουμε ότι όλα τα σημεία της επιφάνειας είναι υπερβολικά.

Η κανονική επιφανειακή καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

είναι ασυμπτωτική καμπύλη της επιφάνειας S , αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $u(t), v(t)$ πληρούν την εξίσωση (6.6), ή ισοδύναμα

$$(u'(t))^2 - (v'(t))^2 = 0.$$

Από αυτή βρίσκουμε ότι μία ακριβώς από τις συναρτήσεις $u(t) + v(t)$ ή $u(t) - v(t)$ είναι σταθερή. Δηλαδή

$$u(t) + v(t) = a_1$$

για κάποια σταθερά a_1 , ή

$$u(t) - v(t) = a_2$$

για κάποια σταθερά a_2 . Τότε αντίστοιχα οι καμπύλες

$$c(t) = X(u(t), v(t)) \text{ με } u(t) = t \text{ και } v(t) = a_1 - t, t \in \mathbb{R}$$

και

$$c(t) = X(u(t), v(t)) \text{ με } u(t) = t \text{ και } v(t) = a_2 + t, t \in \mathbb{R}$$

είναι όλες οι ασυμπτωτικές καμπύλες της επιφάνειας S . Εύκολα προκύπτει πως είναι όλες τους ευθείες (γιατί;).

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $\tilde{X} = X \circ \Phi$, όπου $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι η απεικόνιση που ορίζεται ως

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v) = \left(\frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}), \frac{1}{2}(\tilde{u} - \tilde{v}) \right).$$

Η απεικόνιση \tilde{X} είναι σύστημα συντεταγμένων (γιατί;) της επιφάνειας S . Επιπλέον, επειδή είναι

$$u = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}) \text{ και } v = \frac{1}{2}(\tilde{u} - \tilde{v})$$

συμπεραίνουμε ότι το σύστημα συντεταγμένων \tilde{X} είναι σύστημα ασυμπτωτικών γραμμών της επιφάνειας S .

6.8 Γραμμές καμπυλότητας

Στην παρούσα ενότητα συνεχίζουμε να εξετάζουμε εξέχουσες εφαπτομενικές διευθύνσεις μιας κανονικής επιφάνειας.

Ορισμός 6.8.1. • Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S \setminus \{0\}$ στο σημείο p μιας κανονικής και προσανατολισμένης επιφάνειας S καλείται **κύρια διεύθυνση** της S στο σημείο p , αν είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten

$$L_p: T_p S \rightarrow T_p S.$$

- Μια κανονική επιφανειακή καμπύλη $c: I \rightarrow S$ καλείται **καμπύλη καμπυλότητας** (ή γραμμή καμπυλότητας) της κανονικής επιφάνειας S , αν το διάνυσμα ταχύτητάς της $c'(t)$ είναι κύρια διεύθυνση για κάθε $t \in I$.

Η ακόλουθη πρόταση μας παρέχει ένα τρόπο εύρεσης των κυρίων διευθύνσεων.

Πρόταση 6.8.1. Έστω

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων μιας κανονικής και προσανατολισμένης επιφάνειας S με παραμέτρους $(u, v) \in U$ και $p \in X(U)$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα

$$w = aX_u + bX_v \in T_pS \setminus \{0\}$$

είναι κύρια διεύθυνση της S στο σημείο p , αν και μόνο αν ισχύει

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0, \quad (6.8)$$

όπου τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης E, F, G, e, f, g υπολογίζονται στο σημείο $X^{-1}(p)$.

Απόδειξη. Το εφαπτόμενο διάνυσμα

$$w = aX_u + bX_v \in T_pS \setminus \{0\}$$

είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten

$$L_p: T_pS \rightarrow T_pS$$

αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε

$$L_p w = \lambda w.$$

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας της απεικόνισης Weingarten L_p ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ του εφαπτομένου επιπέδου, τότε η ανωτέρω ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} aa_{11} + ba_{12} &= \lambda a, \\ aa_{21} + ba_{22} &= \lambda b. \end{aligned}$$

Κατόπιν απαλοιφής της ιδιοτιμής λ , βρίσκουμε ότι ισχύει

$$a_{21}a^2 + (a_{22} - a_{11})ab - a_{12}b^2 = 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο πίνακας $A = (a_{ij})$ της απεικόνισης Weingarten δίνεται από την ισότητα (6.4) και αντικαθιστώντας στην ανωτέρω ισότητα, άμεσα προκύπτει η συνθήκη (6.8).

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η ισότητα (6.8) ισχύει για $(a, b) \neq (0, 0)$. Η ισότητα αυτή ισοδύναμα γράφεται στη μορφή

$$a_{21}a^2 + (a_{22} - a_{11})ab - a_{12}b^2 = 0.$$

Από αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned} aa_{11} + ba_{12} &= \lambda a, \\ aa_{21} + ba_{22} &= \lambda b. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $w = aX_u + bX_v \in T_pS \setminus \{0\}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten $L_p: T_pS \rightarrow T_pS$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ . \square

Είναι φανερό ότι η κανονική επιφανειακή καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

είναι γραμμή καμπυλότητας της επιφάνειας S , αν και μόνο αν οι λείες συναρτήσεις $u(t), v(t)$ πληρούν την αλγεβροδιαφορική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0, \quad (6.9)$$

για κάθε $t \in I$, όπου χάριν συντομίας έχουμε θέσει

$$E = E(u(t), v(t)), \quad F = F(u(t), v(t)), \quad G = G(u(t), v(t))$$

και

$$e = e(u(t), v(t)), \quad f = f(u(t), v(t)), \quad g = g(u(t), v(t)).$$

Πρόταση 6.8.2. Έστω κανονική επιφάνεια S , της οποίας οι κύριες καμπυλότητες πληρούν την ανισότητα $k_1 > k_2$ και

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

είναι ένα σύστημα συντεταγμένων αυτής. Τότε οι παραμετρικές καμπύλες του συστήματος συντεταγμένων X είναι καμπύλες καμπυλότητας της επιφάνειας S , αν και μόνο αν ισχύει

$$\boxed{F = f = 0 \text{ στο } U.} \quad (6.10)$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη (6.10). Τότε από την εξίσωση (6.9) βρίσκουμε ότι η κανονική επιφανειακή καμπύλη με παραμετρική παράσταση

$$c(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

είναι καμπύλη καμπυλότητας αν και μόνο αν ισχύει

$$u'(t)v'(t)(Eg - eG) = 0.$$

Ισχυριζόμαστε ότι λόγω της υπόθεσης, η συνάρτηση $Eg - eG$ δεν μηδενίζεται πουθενά. Πράγματι, αν σε κάποιο σημείο ήταν

$$Eg = eG,$$

τότε λόγω της Πρότασης 6.6.1, θα ήταν $k_1 = k_2$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα ισχύει $u'(t) = 0$ ή $v'(t) = 0$, το οποίο σημαίνει ότι η καμπύλη c είναι παραμετρική καμπύλη του συστήματος συντεταγμένων X .

Αντίστροφα, αν οι παραμετρικές καμπύλες είναι καμπύλες καμπυλότητας της επιφάνειας, τότε τα ζεύγη των συναρτήσεων

$$u(t) = t, v(t) = v_0$$

και

$$u(t) = u_0, v(t) = t$$

είναι λύσεις της εξίσωσης (6.9). Κατά συνέπεια λαμβάνουμε τις ισότητες

$$Ef = eF \quad \text{και} \quad Fg = fG.$$

Όμως τα εφαπτομενικά διανύσματα X_u, X_v είναι κύριες διευθύνσεις, δηλαδή ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Weingarten τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές (Θεώρημα 6.4.1). Επομένως πρέπει να είναι ορθογώνια μεταξύ τους, από όπου άμεσα προκύπτει ότι $F = 0$. Οι παραπάνω σχέσεις ολοκληρώνουν την απόδειξη της συνθήκης (6.10). \square

Αναφέρουμε το ακόλουθο θεώρημα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 6.8.3. Έστω κανονική και προσανατολισμένη επιφάνεια S , της οποίας οι κύριες καμπυλότητες πληρούν σε κάθε σημείο την ανισότητα $k_1 > k_2$. Τότε για κάθε σημείο της p , υπάρχει σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

με $p \in X(U)$ του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι καμπύλες καμπυλότητας της επιφάνειας S .

Ένα τέτοιο σύστημα, όπως στο ανωτέρω θεώρημα, θα αναφέρεται συχνά ως σύστημα γραμμών καμπυλότητας.

Το ακόλουθο θεώρημα μας εξασφαλίζει ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια κανονική καμπύλη μιας κανονικής επιφάνειας καμπύλη καμπυλότητας αυτής.

Θεώρημα 6.8.4 (Rodrigues). Μια επιφανειακή κανονική καμπύλη

$$c: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S,$$

με παράμετρο $t \in I$, μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S με απεικόνιση Gauss $N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$, είναι γραμμή καμπυλότητας της επιφάνειας S , αν και μόνο αν υπάρχει λεία συνάρτηση $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$(N \circ c)'(t) = \lambda(t)c'(t), \text{ για κάθε } t \in I.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι μια κανονική επιφανειακή καμπύλη

$$c: I \rightarrow S$$

είναι γραμμή καμπυλότητας αν και μόνο αν, για κάθε $t \in I$, το διάνυσμα ταχύτητάς της $c'(t)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten

$$L_{c(t)}: T_{c(t)}S \rightarrow T_{c(t)}S.$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη λείας συνάρτησης $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$L_{c(t)}c'(t) = -\lambda(t)c'(t), \text{ για κάθε } t \in I.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten, η ανωτέρω ισότητα ισοδύναμα γράφεται ως

$$dN_{c(t)}c'(t) = \lambda(t)c'(t), \text{ για κάθε } t \in I.$$

Από τον ορισμό του διαφορικού (Ορισμός (3.4.2)) προκύπτει τώρα η ζητούμενη σχέση. \square

Είναι φανερό ότι, η συνάρτηση $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ του Θεωρήματος 6.8.4 είναι κύρια καμπυλότητα της επιφάνειας S κατά μήκος της επιφανειακής καμπύλης c .

6.9 Τρίτη θεμελιώδης μορφή

Ορισμός 6.9.1. Έστω S κανονική και προσανατολισμένη επιφάνεια. Η τρίτη θεμελιώδης μορφή III_p της επιφάνειας S στο σημείο της p είναι η τετραγωνική μορφή

$$III_p: T_pS \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$III_p(w) = \langle L_p w, L_p w \rangle_p, \quad w \in T_pS.$$

Προφανώς, από τον ορισμό της απεικόνισης Weingarten ισχύει

$$III_p(w) = \langle dN_p(w), dN_p(w) \rangle_p = \|dN_p(w)\|_p^2,$$

όπου

$$N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

είναι η απεικόνιση Gauss της επιφάνειας S .

Είναι φανερό πως η τρίτη θεμελιώδης μορφή σε κάθε σημείο της επιφάνειας είναι θετικώς ημιοριστική.

Επειδή η απεικόνιση Weingarten

$$L_p: T_p S \rightarrow T_p S$$

είναι αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός του εφαπτομένου επιπέδου $T_p S$, είναι επιπλέον

$$III_p(w) = \langle L_p^2 w, w \rangle_p,$$

όπου έχουμε με L_p^2 έχουμε συμβολίσει τη σύνθεση

$$L_p^2 = L_p \circ L_p.$$

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει τη σχέση μεταξύ των τριών θεμελιωδών μορφών μιας επιφάνειας.

Θεώρημα 6.9.1. Σε κάθε σημείο p μιας κανονικής και προσανατολισμένης επιφάνειας S , οι τρεις θεμελιώδεις της μορφές πληρούν τη σχέση

$$III_p - 2H(p)II_p + K(p)I_p = 0.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση Weingarten

$$L_p: T_p S \rightarrow T_p S$$

πληροί την ισότητα

$$L_p^2 - \text{trace}(L_p) L_p + \det(L_p) Id = 0,$$

όπου Id είναι η ταυτοτική απεικόνιση του εφαπτομένου επιπέδου $T_p S$.

Λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό της καμπυλότητας Gauss και της μέσης καμπυλότητας, η ανωτέρω ισοδύναμα γράφεται ως

$$L_p^2 - 2H(p) L_p + K(p) Id = 0.$$

Από αυτή άμεσα προκύπτει ότι

$$\langle L_p^2 w, w \rangle_p - 2H(p)\langle L_p w, w \rangle_p + K(p)\langle w, w \rangle_p = 0,$$

για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p S$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. \square

Έστω

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

σύστημα συντεταγμένων μιας κανονικής και προσανατολισμένης επιφάνειας S με παραμέτρους $(u, v) \in U$. Υπενθυμίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$LX_u = -N_u, \quad LX_v = -N_v,$$

όπου, χάριν συντομίας, έχουμε ως συνήθως θέσει

$$N_u = (N \circ X)_u \quad \text{και} \quad N_v = (N \circ X)_v.$$

Συνεπώς, ο πίνακας της τρίτης θεμελιώδους μορφής, ως τετραγωνικής μορφής ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ του εφαπτομένου επιπέδου, είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} \|N_u\|^2 & \langle N_u, N_v \rangle \\ \langle N_u, N_v \rangle & \|N_v\|^2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, αν

$$w = aX_u + bX_v \in T_p S$$

είναι τυχαίο εφαπτόμενο διάνυσμα σε σημείο $p \in S$, τότε άμεσα λαμβάνουμε

$$\boxed{III_p(w) = \|N_u\|^2 a^2 + 2\langle N_u, N_v \rangle ab + \|N_v\|^2 b^2.} \quad (6.11)$$

Προφανώς, γεωμετρικώς ισότιμες επιφάνειες έχουν την ίδια τρίτη θεμελιώδη μορφή στα αντίστοιχα σημεία. Πράγματι, έστω S και \tilde{S} προσανατολισμένες επιφάνειες με τρίτες θεμελιώδεις μορφές III και \tilde{III} , αντίστοιχα. Αν οι επιφάνειες S και \tilde{S} είναι γεωμετρικώς ισότιμες

και $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ είναι ισομετρία του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 με $\tilde{S} = T(S)$, τότε ισχύει

$$\tilde{III}_{T(p)}(dT_p(w)) = III_p(w), \text{ για κάθε } p \in S \text{ και } w \in T_p S.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της τρίτης θεμελιώδους μορφής και την Πρόταση 5.2.1.

6.10 Ελαχιστικές επιφάνειες

Μια ιδιαιτέρως σημαντική κλάση κανονικών επιφανειών, με πολλές εφαρμογές, είναι οι λεγόμενες ελαχιστικές επιφάνειες.

Ορισμός 6.10.1. Μια κανονική επιφάνεια καλείται ελαχιστική αν η μέση καμπυλότητά της είναι $H = 0$.

Από την ανισότητα

$$H^2 \geq K$$

προκύπτει ότι οι ελαχιστικές επιφάνειες έχουν καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$. Είναι φανερό πως τα σημεία κάθε ελαχιστικής επιφάνειας είναι είτε υπερβολικά, είτε ισόπεδα.

Παραδείγματα ελαχιστικών επιφανειών, πέραν των επιπέδων, είναι η ελικοειδής επιφάνεια, η αλυσοειδής επιφάνεια (Παράδειγμα 4.2.2) και η επιφάνεια του Enneper (Άσκηση 5).

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.10.1. Για κάθε σημείο p κανονικής επιφάνειας S υπάρχει σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

με παραμέτρους $(u, v) \in U$ και $p \in X(U)$, τέτοιο ώστε τα αντίστοιχα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης να πληρούν

$$E = G \text{ και } F = 0.$$

Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων καλείται **ισόθερμο**.

Πρόταση 6.10.2. Για κάθε ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \rightarrow S,$$

με παραμέτρους $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, μιας κανονικής και προσανατολισμένης επιφάνειας S , ισχύει²

$$\Delta X = 2EHN,$$

όπου N είναι η απεικόνιση Gauss της κανονικής επιφάνειας S , $H = H \circ X$, $N = N \circ X$ και

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

είναι ο Λαπλασιανός τελεστής.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \Delta X, X_u \rangle &= \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_{vv}, X_u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle X_u, X_u \rangle_u + \langle X_u, X_v \rangle_v - \langle X_v, X_{uv} \rangle \\ &= \frac{1}{2} E_u - \frac{1}{2} E_u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\langle \Delta X, X_v \rangle = 0.$$

Επομένως είναι

$$\begin{aligned} \Delta X &= \langle \Delta X, N \rangle N \\ &= (\langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_{vv}, N \rangle) N \\ &= (e + g)N. \end{aligned}$$

²Αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων του συστήματος συντεταγμένων είναι $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$, δηλαδή αν είναι

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

τότε με το σύμβολο ΔX συμβολίζουμε την απεικόνιση

$$\Delta X(u, v) = (\Delta x(u, v), \Delta y(u, v), \Delta z(u, v)).$$

Από τη σχέση (6.3), έχουμε ότι η μέση καμπυλότητα είναι

$$H = \frac{e + g}{2E}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Το πόρισμα που ακολουθεί συσχετίζει τις ελαχιστικές επιφάνειες με τις αρμονικές συναρτήσεις και προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 6.10.2.

Υπενθυμίζουμε ότι μια C^2 συνάρτηση $h: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται *αρμονική* αν ισχύει

$$\Delta h = 0.$$

Πόρισμα 6.10.3. Μια κανονική επιφάνεια S είναι ελαχιστική αν και μόνο αν για κάθε ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων X αυτής ισχύει

$$\Delta X = 0.$$

Με άλλα λόγια, αν το σύστημα συντεταγμένων είναι

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

τότε η επιφάνεια S είναι ελαχιστική αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ του συστήματος συντεταγμένων X είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Υποθέτουμε τώρα ότι

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

είναι ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων μιας ελαχιστικής επιφάνειας με παραμέτρους $(u, v) \in U$. Θεωρούμε τις μιγαδικές συναρτήσεις

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(x_u + ix_v), \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(y_u + iy_v), \quad \phi_3 = \frac{1}{2}(z_u + iz_v).$$

Κάνοντας χρήση της αρμονικότητας των συναρτήσεων συντεταγμένων $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$, εύκολα προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{z}} = 0,$$

όπου $\zeta = u + iv$ και

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Αυτό σημαίνει ότι οι μιγαδικές συναρτήσεις ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 είναι ολόμορφες. Θέτοντας

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3),$$

έχουμε

$$\phi = \frac{1}{2} (X_u + iX_v) = \frac{\partial X}{\partial \bar{\zeta}}.$$

Συνεπώς, η επιφάνεια δίνεται μέσω ολοκληρώματος ως

$$X = \operatorname{Re} \int \phi d\bar{\zeta}.$$

Επιπλέον, επειδή το σύστημα συντεταγμένων X είναι ισόθερμο, έχουμε

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = E - G + 2iF = 0.$$

Η ανωτέρω διαδικασία μας εξασφαλίζει μια τοπική μέθοδο κατασκευής ελαχιστικών επιφανειών με χρήση ολόμορφων συναρτήσεων. Πράγματι, για κάθε τριάδα ολόμορφων συναρτήσεων $\phi_1(\zeta), \phi_2(\zeta), \phi_3(\zeta)$ οι οποίες επιπλέον ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0,$$

θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X = \operatorname{Re} \int \phi d\bar{\zeta}$$

με παραμέτρους (u, v) όπου $u + iv = \zeta$.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\langle X_u, X_v \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle,$$

δηλαδή το σύστημα συντεταγμένων X είναι ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων.

Επιπλέον, ισχύει

$$\Delta X = 0.$$

Από το Πρόρισμα 6.10.3, προκύπτει ότι η επιφάνεια είναι ελαχιστική.

6.11 Ασκήσεις

1. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(u, v) = (u, v, e^u + e^v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- (i) Να υπολογιστεί η πρώτη και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή.
 (ii) Να υπολογιστεί η κάθετη καμπυλότητα στην εφαπτομενική της διεύθυνση $c'(1)$, όπου c είναι η επιφανειακή καμπύλη

$$c(t) = X(t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (iii) Να υπολογίστε την κάθετη καμπυλότητα στις εφαπτομενικές διευθύνσεις των παραμετρικών καμπυλών.

2. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(u, v) = (u, v, u^2 + v^3), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Να βρεθούν τα ελλειπτικά, υπερβολικά, ισόπεδα, παραβολικά και ομφαλικά της σημεία.

3. Δίνεται η επιφάνεια S με εξίσωση

$$z = x^5 + y^5.$$

Αφού αποδείξετε ότι η επιφάνεια S είναι προσανατολισμένη, υπολογίστε την απεικόνιση Weingarten και τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή της στο σημείο της $(0, 0, 0)$.

4. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των καθέτων καμπυλοτήτων μιας κανονικής επιφάνειας σε τυχόν σημείο της p , ως προς δύο ορθογώνιες εφαπτομενικές διευθύνσεις στο p , είναι ανεξάρτητο των διευθύνσεων αυτών.

6.11. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια.

(ii) Να υπολογιστεί η μέση καμπυλότητα, η καμπυλότητα Gauss και οι κύριες καμπυλότητες της.

6. Θεωρούμε την επιφάνεια S με εξίσωση

$$z = x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

(i) Αποδείξτε ότι τα διανύσματα

$$w_1 = (0, 1, 0) \quad \text{και} \quad w_2 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

ανήκουν στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S στο σημείο της $p = (1/2, 0, 1/4)$.

(ii) Βρείτε τις εικόνες των εφαπτομένων διανυσμάτων w_1, w_2 μέσω της απεικόνισης Weingarten L_p .

7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε κανονική παραμετρική επιφάνεια

$$X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με παραμέτρους $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, ισχύουν οι ταυτότητες

$$N_u \times N_v = KX_u \times X_v$$

και

$$N_u \times X_v + X_u \times N_v = -2HX_u \times X_v$$

όπου N είναι το μοναδιαίο κάθετο.

8. Δίνεται κανονική παραμετρική επιφάνεια

$$X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με παραμέτρους $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ και μοναδιαίο κάθετο $N(u, v)$. Θεωρούμε $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και την παραμετρική επιφάνεια

$$\tilde{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$\tilde{X}(u, v) = X(u, v) + aN(u, v).$$

(i) Αποδείξτε ότι η παραμετρική επιφάνεια \tilde{X} είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια, αν και μόνο αν ο αριθμός $1/a$ δεν είναι κύρια καμπυλότητα της παραμετρικής επιφάνειας X σε κανένα σημείο της. Αν είναι κανονική τότε:

(ii) Βρείτε το μοναδιαίο κάθετο \tilde{N} της παραμετρικής επιφάνειας \tilde{X} .

(iii) Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss \tilde{K} και η μέση καμπυλότητα \tilde{H} της παραμετρικής επιφάνειας \tilde{X} δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2Ha + Ka^2}, \quad \tilde{H} = \frac{H - Ka}{1 - 2Ha + Ka^2}.$$

(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε κανονική επιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα $c \neq 0$ και παντού μη μηδενική καμπυλότητα Gauss υπάρχει επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss $4c^2$.

9. Έστω c ασυμπτωτική καμπύλη μιας κανονικής επιφάνειας S με καμπυλότητα k παντού θετική και στρέψη τ . Να αποδειχθεί ότι σε κάθε σημείο της καμπύλης c ισχύει η σχέση

$$\tau^2 = -K,$$

όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας S .

10. Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές γραμμές της παραμετρικής επιφάνειας

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

6.11. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

με

$$X(u, v) = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, au)$$

όπου $a \in \mathbb{R}^+$.

11. Να βρεθούν οι γραμμές καμπυλότητας της επιφάνειας με εξίσωση

$$z = x^2 + y^2.$$

12. Αν όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα μιας κανονικής επιφάνειας S είναι παράλληλα προς μια ευθεία, να αποδειχθεί ότι η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας S είναι παντού μηδέν.
13. Αποδείξτε ότι αν όλες οι κάθετες ευθείες μιας κανονικής και συνεκτικής επιφάνειας S διέρχονται από κοινό σημείο, τότε η επιφάνεια S είναι τμήμα σφαίρας.
14. Αν από σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας διέρχονται τρεις διακεκριμένες ευθείες που περιέχονται στην επιφάνεια, τότε αποδείξτε ότι το σημείο p είναι ισόπεδο σημείο.
15. Να αποδειχθεί ότι η ελικοειδής και η αλυσοειδής επιφάνεια (Παράδειγμα 4.2.2) είναι ελαχιστικές επιφάνειες.
16. Αποδείξτε ότι οι εκ περιστροφής επιφάνειες του Παραδείγματος 6.5.1 με καμπυλότητα Gauss $K = 1$ είναι τοπικά ισομετρικές με τη μοναδιαία σφαίρα \mathbb{S}^2 .

6. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ WEINGARTEN-ΔΕΥΤΕΡΗ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΜΟΡΦΗ

Κεφάλαιο 7

Έξοχο Θεώρημα-Θεμελιώδες Θεώρημα των επιφανειών

Μας είναι ήδη γνωστό ότι δεν αρκεί η πρώτη θεμελιώδη μορφή για να καθοριστεί μια κανονική επιφάνεια του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 ως προς γεωμετρική ισοτιμία. Εγείρεται τότε το ερώτημα αν η πρώτη μαζί με τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή αρκούν για να καθοριστεί μια κανονική επιφάνεια του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 .

Ο στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι να δοθεί απάντηση σε αυτό το πρόβλημα μέσω της αναζήτησης ενός θεωρήματος αντίστοιχου του Θεμελιώδους Θεωρήματος της θεωρίας των καμπυλών.

7.1 Τύποι των Gauss και Weingarten

Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss

$$N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

και

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

ένα σύστημα συντεταγμένων της με παραμέτρους $(u, v) \in U$.

Σε κάθε σημείο της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$ τα διανύσματα

$$\{X_u, X_v, N\}$$

συνιστούν μια βάση του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 . Αυτή η βάση αποτελεί το ανάλογο του πλαισίου Frenet για καμπύλες του \mathbb{R}^3 , παρά το γεγονός ότι εν γένει δεν είναι ορθομοναδιαία βάση.

Για να εξετάσουμε πως μεταβάλλεται αυτό το πλαίσιο, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους των διανυσμάτων του ως προς τις παραμέτρους u, v και το αποτέλεσμα των παραγωγίσεων να το γράψουμε ως γραμμικό συνδυασμό του πλαισίου

$$\{X_u, X_v, N\}$$

του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 . Πράγματι, υπάρχουν συναρτήσεις

$$\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}, L_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}, b_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}, i, j, k \in \{1, 2\},$$

τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_{11} N \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_{12} N \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + L_{21} N \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_{22} N \\ N_u &= b_{11} X_u + b_{21} X_v \\ N_v &= b_{12} X_u + b_{22} X_v, \end{aligned}$$

όπου

$$(b_{ij}) = -(a_{ij}) = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

και (a_{ij}) είναι ο πίνακας της απεικόνισης Weingarten ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$ (βλέπε σχέση (6.4)) του εφαπτομένου επιπέδου. Οι δύο τελευταίες εξισώσεις είναι γνωστές ως **τύποι Weingarten**.

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά τις τέσσερις πρώτες εξισώσεις με το μοναδιαίο κάθετο N , βρίσκουμε εύκολα ότι

$$L_{11} = e, \quad L_{12} = L_{21} = f, \quad L_{22} = g,$$

όπου e, f, g είναι τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης της επιφάνειας, ως προς το σύστημα συντεταγμένων X .

Επομένως λαμβάνουμε τους λεγόμενους **τύπους του Gauss**

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \quad (7.2)$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \quad (7.3)$$

$$X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN \quad (7.4)$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN. \quad (7.5)$$

Οι συναρτήσεις

$$\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i, j, k \in \{1, 2\},$$

ονομάζονται **σύμβολα Christoffel** της επιφάνειας S ως προς το σύστημα συντεταγμένων X . Πρόκειται περί τοπικών συναρτήσεων οι οποίες εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων.

Επειδή λόγω του Θεωρήματος του Schwarz ισχύει

$$X_{uv} = X_{vu},$$

έχουμε ότι τα σύμβολα Christoffel είναι συμμετρικά ως προς τους κάτω δείκτες, δηλαδή ισχύει

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad i, j, k \in \{1, 2\}.$$

Για τον υπολογισμό των συμβόλων Christoffel, πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά τους τύπους του Gauss με τα διανύσματα X_u, X_v και λύνουμε τα γραμμικά συστήματα τα οποία προκύπτουν.

Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$, από τον πρώτο τύπο του Gauss λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle X_{uu}, X_u \rangle \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle X_{uu}, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Όμως είναι

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} \langle X_u, X_u \rangle_u = \frac{1}{2} E_u$$

και

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = \langle X_u, X_v \rangle_u - \frac{1}{2} \langle X_u, X_u \rangle_v = F_u - \frac{1}{2} E_v.$$

Επειδή ισχύει $EG - F^2 > 0$, το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= F_u - \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$

με αγνώστους τα σύμβολα Christoffel $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ έχει μοναδική λύση, η οποία εξαρτάται μόνο από τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης E, F, G και τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης αυτών.

Εργαζόμενοι ομοίως για τα υπόλοιπα σύμβολα Christoffel, καταλήγουμε σε παρόμοιο συμπέρασμα. Με άλλα λόγια αποδείξαμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 7.1.1. Τα σύμβολα Christoffel ενός συστήματος συντεταγμένων X μιας κανονικής επιφάνειας S είναι λείες συναρτήσεις, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης του X καθώς και τις παραγώγους των πρώτης τάξης, δηλαδή εξαρτώνται μόνον από την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας.

7.2 Έξοχο Θεώρημα

Από το Θεώρημα του Schwarz, προφανώς έχουμε

$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u, \quad (X_{vv})_u = (X_{uv})_v \quad \text{και} \quad N_{uv} = N_{vu}.$$

Κάνοντας χρήση των τύπων Gauss και Weingarten, οι ανωτέρω ισότητες γράφονται ισοδύναμα ως

$$A_i X_u + B_i X_v + C_i N = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.6)$$

όπου καθένας από τους συντελεστές A_i, B_i, C_i εξαρτάται μόνο από τα σύμβολα Christoffel, τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης E, F, G, e, f, g και τις παραγώγους των πρώτης τάξης.

Έτσι η σχέση

$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$$

γράφεται ισοδύναμα ως

$$A_1 X_u + B_1 X_v + C_1 N = 0, \quad (7.7)$$

όπου

$$B_1 = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + eb_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - fb_{21} - (\Gamma_{12}^2)_u.$$

Από την (7.7) προκύπτει ότι $B_1 = 0$, και επομένως έχουμε

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + eb_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + fb_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u.$$

Κάνοντας χρήση της ισότητας (7.1) και αντικαθιστώντας στην ανωτέρω ισότητα τις συναρτήσεις b_{22}, b_{21} , λαμβάνουμε μετά από πράξεις την ισότητα

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \\ = -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Λόγω της Πρότασης 6.5.2 (σχέση (6.2)), τελικώς έχουμε

$$\boxed{(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -EK.} \quad (7.8)$$

Η ανωτέρω σχέση είναι γνωστή ως **εξίσωση Gauss**.

Αξιοσημείωτο είναι ότι αυτή η εξίσωση μας δίνει μια τελείως διαφορετική έκφραση για την καμπυλότητα Gauss από αυτή που είχαμε εξάγει στην Πρόταση 6.5.2. Έτσι ο Gauss οδηγήθηκε στο να διατυπώσει το περίφημο **Έξοχο Θεώρημα (Theorema Egregium)!**

Θεώρημα 7.2.1 (Theorema Egregium). Η καμπυλότητα Gauss κάθε κανονικής επιφάνειας εξαρτάται μόνο από τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης τυχόντος συστήματος συντεταγμένων της καθώς και τις μερικές παραγώγους των μέχρι δευτέρας τάξης, δηλαδή εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή.

Απόδειξη. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την εξίσωση Gauss (7.8) και το Λήμμα 7.1.1. \square

Η σημασία του Θεωρήματος 7.2.1 είναι θεμελιώδης για τη Διαφορική Γεωμετρία. Ουσιαστικά το Έξοχο Θεώρημα ισχυρίζεται ότι η καμπυλότητα Gauss, παρότι αρχικά είχε οριστεί ως αναλλοίωτη της έξωθεν γεωμετρίας, τελικώς είναι **αναλλοίωτη της έσωθεν γεωμετρίας**. Κατά συνέπεια, η καμπυλότητα Gauss διατηρείται από τις ισομετρίες μεταξύ κανονικών επιφανειών. Ως άμεση συνέπεια του Εξόχου Θεωρήματος έχουμε λοιπόν το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 7.2.2. Αν S και \tilde{S} είναι (τοπικά) ισομετρικές κανονικές επιφάνειες με καμπυλότητες Gauss K και \tilde{K} αντίστοιχα, και $\Phi: S \rightarrow \tilde{S}$ είναι μια μεταξύ τους (τοπική) ισομετρία, τότε ισχύει

$$\tilde{K}(\Phi(p)) = K(p)$$

για κάθε σημείο $p \in S$.

Έτσι, δύο επιφάνειες με σταθερές αλλά διαφορετικές μεταξύ τους καμπυλότητες Gauss δεν μπορεί να είναι τοπικά ισομετρικές. Κατά συνέπεια, καμία περιοχή σφαίρας δεν μπορεί να είναι ισομετρική με καμία περιοχή τυχόντος επιπέδου ή του ορθού κυκλικού κυλίνδρου.

7.3 Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας των επιφανειών

Από την ισότητα (7.6), λαμβάνουμε

$$C_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι οι τρεις αυτές εξισώσεις είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \quad (7.9)$$

και

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \quad (7.10)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως **εξισώσεις Mainardi-Codazzi**.

Αυτές οι εξισώσεις μαζί με την εξίσωση Gauss (7.8) είναι ουσιαστικά σχέσεις-συνθήκες μεταξύ πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής.

Το ακόλουθο θεώρημα, γνωστό ως Θεώρημα Bonnet, μας εξασφαλίζει ότι οι εξισώσεις Gauss και Mainardi-Codazzi είναι οι συνθήκες για την ολοκλήρωση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που αποτελείται από τους τύπους Gauss και Weingarten με άγνωστο τη διανυσματική απεικόνιση X .

Θεώρημα 7.3.1 (Θεμελιώδες Θεώρημα της θεωρίας των επιφανειών).

Έστω λείες συναρτήσεις

$$E, F, G, e, f, g: V \rightarrow \mathbb{R},$$

ορισμένες στο ανοικτό υποσύνολο V του \mathbb{R}^2 , τέτοιες ώστε

$$E > 0, G > 0 \text{ και } EG - F^2 > 0$$

σε κάθε σημείο του V .

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές πληρούν την εξίσωση Gauss (7.8) και τις εξισώσεις Mainardi-Codazzi (7.9) και (7.10). Τότε για κάθε σημείο $q \in V$ υπάρχει περιοχή $U \subseteq V$ του σημείου q και λεία παραμετρική επιφάνεια

$$X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

τέτοια ώστε η εικόνα της $X(U)$ να είναι κανονική επιφάνεια της οποίας τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης είναι οι δοθείσες συναρτήσεις E, F, G και e, f, g , αντίστοιχα.

Επιπλέον αν

$$\tilde{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

είναι μια άλλη τέτοια παραμετρική επιφάνεια, τότε οι επιφάνειες $X(U)$ και $\tilde{X}(U)$ είναι γεωμετρικώς ισοτιμες, δηλαδή υπάρχει ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$, η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό, τέτοια ώστε

$$\tilde{X} = T \circ X.$$

Το ανωτέρω σημαντικό θεώρημα δίνει απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, δηλαδή κατά πόσο η πρώτη μαζί με τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή αρκούν για να καθοριστεί μια κανονική επιφάνεια του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 , ως προς γεωμετρική ισοτιμία.

7.4 Ασκήσεις

1. Υπάρχει κανονική επιφάνεια τοπικά ισομετρική με τον ορθό κυκλικό κύλινδρο, της οποίας τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων να είναι

$$e = 1, f = 0, g = -1;$$

2. Έστω S συνεκτική επιφάνεια με σταθερές μη μηδενικές κύριες καμπυλότητες. Αποδείξτε ότι είναι τμήμα σφαίρας.

Υπόδειξη: Αρκεί να αποδειχθεί ότι οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες. Δια της εις άτοπον απαγωγή, υποθέτουμε ότι δεν είναι ίσες. Τότε υπάρχει σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

με παραμέτρους $(u, v) \in U$, τέτοιο ώστε να πληρούνται οι σχέσεις:

$$N_u = aX_u \quad \text{και} \quad N_v = bX_v,$$

όπου $a \neq b$ είναι μη μηδενικές σταθερές και N είναι η απεικόνιση Gauss της επιφάνειας. Χρησιμοποιήστε τις υποθέσεις και το Έξοχο Θεώρημα για να καταλήξετε σε άτοπο.

Κεφάλαιο 8

Ευθειογενείς-Αναπτυκτές επιφάνειες

Το παρόν κεφάλαιο αφιερώνεται στη μελέτη των ευθειογενών επιφανειών, καθώς και μιας σημαντικής κλάσης αυτών, τις καλούμενες αναπτυκτές επιφάνειες.

8.1 Ευθειογενείς επιφάνειες

Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με ευθειογενείς επιφάνειες, δηλαδή με επιφάνειες οι οποίες παράγονται από κίνηση ευθείας. Ο ακριβής ορισμός τους είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 8.1.1. Μια κανονική επιφάνεια S καλείται **ευθειογενής** αν από κάθε σημείο της διέρχεται μια ευθεία (ή ευθύγραμμο τμήμα) που περιέχεται στην επιφάνεια S .

Οι ευθείες μιας ευθειογενούς επιφάνειας αναφέρονται ως **γενέτριες** αυτής.

Ως πρώτα παραδείγματα ευθειογενών επιφανειών μπορούμε να αναφέρουμε το επίπεδο, τον ορθό κυκλικό κύλινδρο, το ελικοειδές καθώς και το μονόχωνο υπερβολοειδές με εξίσωση (βλέπε Άσκηση 8.4.5)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Θα μελετήσουμε δε εκτενώς μια ιδιαίτερη κατηγορία ευθειογενών επιφανειών, τις λεγόμενες αναπτυκτές επιφάνειες.

Έστω S κανονική επιφάνεια και

$$c: I \rightarrow S$$

κανονική επιφανειακή καμπύλη της S με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$. Γνωρίζουμε ότι η κάθετη καμπυλότητα στην εφαπτομενική διεύθυνση $\dot{c}(s) \in T_{c(s)}S$ είναι

$$\begin{aligned} k_n(\dot{c}(s)) &= II_{c(s)}(\dot{c}(s)) \\ &= \left\langle L_{c(s)}\dot{c}(s), \dot{c}(s) \right\rangle_{c(s)} \\ &= -\left\langle dN_{c(s)}(\dot{c}(s)), \dot{c}(s) \right\rangle_{c(s)} \\ &= -\langle (N \circ c)'(s), \dot{c}(s) \rangle \\ &= \langle (N \circ c)(s), \ddot{c}(s) \rangle. \end{aligned}$$

Αν η καμπύλη c είναι ευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα, τότε ισχύει

$$\ddot{c}(s) = 0,$$

για κάθε $s \in I$. Από το ανωτέρω άμεσα συμπεραίνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση, η εφαπτομενική διεύθυνση $\dot{c}(s)$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση της επιφάνειας. Αποδείξαμε επομένως το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 8.1.1. *Αν μια κανονική επιφάνεια S περιέχει καμπύλες οι οποίες είναι ευθείες ή ευθύγραμμα τμήματα, τότε αυτές είναι ασυμπτωτικές καμπύλες της επιφάνειας S .*

Άμεση συνέπεια είναι το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πόρισμα 8.1.2. *Αν μια κανονική επιφάνεια S είναι ευθειογενής, τότε οι γενέτειρές της είναι ασυμπτωτικές καμπύλες της.*

Η πρόταση αυτή μας παρέχει μια μέθοδο για να αποφανθούμε κατά πόσο μια δοθείσα κανονική επιφάνεια είναι ευθειογενής. Αρχικά εξετάζουμε αν η επιφάνεια περιέχει μια οικογένεια ασυμπτωτικών καμπυλών. Αν δεν περιέχει τέτοια οικογένεια, τότε προφανώς

δεν είναι ευθειογενής. Αν όμως περιέχει μια οικογένεια ασυμπτωτικών καμπυλών, τότε εξετάζουμε κατά πόσο κάθε καμπύλη της οικογένειας αυτής είναι ευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα. Σε καταφατική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι η επιφάνεια είναι ευθειογενής, διαφορετικά δεν είναι ευθειογενής.

Από την ανωτέρω πρόταση, καθώς και τις Προτάσεις 6.6.1 και 6.7.1, προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα των ευθειογενών επιφανειών.

Πόρισμα 8.1.3. *Κάθε ευθειογενής επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$ παντού.*

Παραθέτουμε στη συνέχεια τρεις ενδιαφέρουσες κλάσεις ευθειογενών επιφανειών.

Παράδειγμα 8.1.1. Έστω $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ επίπεδη καμπύλη, με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$, η οποία περιέχεται σε επίπεδο Π το οποίο είναι ορθογώνιο στο μοναδιαίο διάνυσμα e . Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(s, v) = c(s) + ve, \quad (s, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι πρόκειται περί κανονικής παραμετρικής επιφάνειας.

Η επιφάνεια αυτή καλείται **κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό καμπύλη** την καμπύλη c . Οι παραμετρικές της καμπύλες $s = s_0$ είναι ευθείες και επομένως πρόκειται περί ευθειογενούς επιφάνειας. Σημειώνουμε ότι όλες οι γενέτειρες είναι παράλληλες προς σταθερή διεύθυνση. Με ένα άμεσο υπολογισμό, διαπιστώνουμε ότι τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης πληρούν

$$f = g = 0.$$

Συνεπώς, η καμπυλότητα Gauss είναι $K = 0$.

Παράδειγμα 8.1.2. Έστω $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο $u \in I$. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(u, v) = c(u) + vw(u), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R},$$

όπου

$$w(u) = ac(u) + p_0 \text{ με } a \neq 0 \text{ και } p_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Προφανώς, πρόκειται περί ευθειογενούς επιφάνειας. Οι παραμετρικές της καμπύλες $u = u_0$ είναι ευθείες οι οποίες διέρχονται όλες από το σημείο $(-1/a)p_0$.

Η επιφάνεια αυτή καλείται **κωνική επιφάνεια με κορυφή** το σημείο $(-1/a)p_0$ και **οδηγό καμπύλη** την καμπύλη c . Σημειώνουμε ότι όλες οι γενέτειρες διέρχονται από το ίδιο σημείο, την κορυφή της κωνικής επιφάνειας. Με ένα άμεσο υπολογισμό διαπιστώνουμε ότι η καμπυλότητα Gauss είναι $K = 0$, εκεί όπου η παραμετρική επιφάνεια X είναι κανονική.

Παράδειγμα 8.1.3. Έστω $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $u \in I$. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(u, v) = c(u) + vc'(u), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

Η επιφάνεια αυτή καλείται **επιφάνεια εφαπτομένων** της καμπύλης c , για τον προφανή λόγο ότι οι παραμετρικές της καμπύλες $u = u_0$ είναι οι εφαπτόμενες ευθείες της καμπύλης c . Προφανώς πρόκειται περί ευθειογενούς επιφάνειας. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η καμπυλότητα Gauss είναι $K = 0$, εκεί όπου η παραμετρική επιφάνεια X είναι κανονική.

8.2 Αναπτυκτές επιφάνειες-Επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K = 0$

Γνωρίζουμε, από τα Παραδείγματα 8.1.1, 8.1.2 και 8.1.3, τρεις ευρείες οικογένειες επιφανειών με καμπυλότητα Gauss $K = 0$, συγκεκριμένα τις κυλινδρικές επιφάνειες, τις κωνικές επιφάνειες και τις επιφάνειες εφαπτομένων. Υπάρχουν άραγε άλλες επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K = 0$; Σημειώνουμε πως όλα τα σημεία μιας τέτοιας επιφάνειας είναι είτε παραβολικά, είτε ισόπεδα.

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K = 0$, με την υπόθεση όμως ότι **δεν περιέχουν ισόπεδα σημεία**.

Έστω κανονική επιφάνεια S της οποίας όλα τα σημεία είναι παραβολικά. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι οι κύριες καμπυλότητές της είναι

$$k_1 > 0 \text{ και } k_2 = 0.$$

Τότε από το Θεώρημα 6.8.3 γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

με παραμέτρους $(u, v) \in U$ και $p \in X(U)$, του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι καμπύλες καμπυλότητας. Υποθέτουμε ότι είναι

$$LX_u = k_1 X_u \text{ και } LX_v = 0.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε ότι

$$N_v = 0.$$

Επομένως, το μοναδιαίο κάθετο N είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου v , δηλαδή ισχύει

$$N(u, v) = N(u).$$

Συνεπώς και η απεικόνιση N_u είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου v . Επιπλέον, από την Πρόταση 6.8.2 είναι $f = 0$, ή ισοδύναμα

$$\langle X_v, N_u \rangle = 0.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα X_ν των παραμετρικών καμπυλών $u = u_0$ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $N \times N_u$, το οποίο είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου ν . Με άλλα λόγια, το εφαπτόμενο διάνυσμα της παραμετρικής καμπύλης $X(u_0, \nu)$ σε κάθε σημείο της είναι παράλληλο προς ένα σταθερό διάνυσμα. Οι μόνες κανονικές καμπύλες οι οποίες έχουν αυτή την ιδιότητα είναι οι ευθείες (βλέπε Άσκηση 2.7.9).

Συνεπώς αποδείξαμε ότι η επιφάνεια είναι ευθειογενής. Επιπλέον, αποδείξαμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας κατά μήκος της κάθε γενέτειράς της παραμένει σταθερό. Τέτοιες επιφάνειες καλούνται αναπτυκτές.

Ορισμός 8.2.1. Μια κανονική επιφάνεια καλείται **αναπτυκτική**, αν είναι ευθειογενής και το εφαπτόμενο επίπεδο της παραμένει σταθερό κατά μήκος της κάθε γενέτειράς της.

Άρα έχουμε εν κατακλείδι αποδείξει το εξής συμπέρασμα.

Θεώρημα 8.2.1. Κάθε επιφάνεια, της οποίας όλα τα σημεία είναι παραβολικά, είναι αναπτυκτική.

Ισχύει το ακόλουθο ισχυρότερο αντίστροφο.

Θεώρημα 8.2.2. Κάθε αναπτυκτική επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K = 0$.

Απόδειξη. Έστω S αναπτυκτική επιφάνεια και c μια γενέτειρά της με παράμετρο $t \in I$. Τότε το μοναδιαίο κάθετο N της επιφάνειας παραμένει σταθερό κατά μήκος της γενέτειρας c , δηλαδή είναι

$$(N \circ c)'(t) = 0, \text{ για κάθε } t \in I.$$

Όμως από τον ορισμό της τρίτης θεμελιώδους μορφής, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} III_{c(t)}(c'(t)) &= \langle L_{c(t)}(c'(t)), L_{c(t)}(c'(t)) \rangle \\ &= \langle (N \circ c)'(t), (N \circ c)'(t) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 6.9.1 λαμβάνουμε

$$K(c(t)) I_{c(t)}(c'(t)) = 2H(c(t)) II_{c(t)}(c'(t)),$$

ή ισοδύναμα

$$K(c(t)) = 2H(c(t)) k_n(c'(t)).$$

Με τη βοήθεια της Πρότασης 8.1.1, προκύπτει ότι

$$K(c(t)) = 0$$

για κάθε $t \in I$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Άμεση συνέπεια της ανωτέρω πρότασης είναι ότι, αν η καμπυλότητα Gauss μιας επιφάνειας δεν είναι παντού μηδέν, τότε η επιφάνεια δεν είναι αναπτυκτή.

8.3 Ταξινόμηση των αναπτυκτών επιφανειών

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι επιφάνειες των Παραδειγμάτων 3.1.5, 8.1.2 και 8.1.3 είναι αναπτυκτές. Είναι οι μόνες ή υπάρχουν και άλλες αναπτυκτές επιφάνειες; Θα επιχειρήσουμε να δώσουμε απάντηση σε αυτό το ερώτημα.

Έστω

$$c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

κανονική καμπύλη με παράμετρο $u \in I$ και

$$w: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

μια λεία διανυσματική απεικόνιση τέτοια ώστε

$$\|w(u)\| = 1 \text{ και } c'(u) \times w(u) \neq 0, \text{ για κάθε } u \in I. \quad (8.1)$$

Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια

$$X: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(u, v) = c(u) + vw(u).$$

Προφανώς πρόκειται περί ευθιογενούς επιφάνειας, αφού οι παραμετρικές της καμπύλες $u = u_0$ είναι οι ευθείες παράλληλες προς το

μοναδιαίο διάνυσμα $w(u_0)$. Αντίστροφα, είναι φανερό ότι κάθε ευθιιογενής επιφάνεια δύναται να παραμετρηθεί τοπικά κατ' αυτόν τον τρόπο.

Έχουμε επιπλέον ότι

$$X_u(u, v) = c'(u) + vw'(u) \text{ και } X_v(u, v) = w(u).$$

Λόγω της συνθήκης (8.1), είναι

$$X_u(u, 0) \times X_v(u, 0) \neq 0, \text{ για κάθε } u \in I.$$

Επομένως, για αρκούντως μικρές τιμές της παραμέτρου v , η παραμετρική επιφάνεια X είναι κανονική με μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο

$$N(u, v) = \frac{c'(u) \times w(u) + vw'(u) \times w(u)}{\|c'(u) \times w(u) + vw'(u) \times w(u)\|}.$$

Επιπλέον, τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης f και g δίνονται αντίστοιχα από τις ισότητες

$$f(u, v) = \frac{[c'(u), w(u), w'(u)]}{\|c'(u) \times w(u) + vw'(u) \times w(u)\|}, \quad g = 0.$$

Αν η παραμετρική επιφάνεια X είναι αναπτυκτή, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 8.2.2, η καμπυλότητα Gauss είναι $K = 0$ ή ισοδύναμα λόγω της ισότητας (6.2),

$$[c'(u), w(u), w'(u)] = 0, \text{ για κάθε } u \in I.$$

Αντίστροφα, αν είναι

$$[c'(u), w(u), w'(u)] = 0, \text{ για κάθε } u \in I,$$

τότε έχουμε

$$\langle w'(u), c'(u) \times w(u) \rangle = 0.$$

Επειδή

$$\|w(u)\| = 1,$$

λαμβάνουμε

$$\langle w'(u), w(u) \rangle = 0, \text{ για κάθε } u \in I.$$

Συνεπώς, το διάνυσμα $w'(u)$ είναι συγγραμικό με το διάνυσμα

$$(c'(u) \times w(u)) \times w(u) = \langle c'(u), w(u) \rangle w(u) - c'(u),$$

δηλαδή είναι

$$w'(u) = \mu(u) (\langle c'(u), w(u) \rangle w(u) - c'(u))$$

για κατάλληλη συνάρτηση $\mu(u)$. Τότε έχουμε

$$c'(u) \times w(u) + \nu w'(u) \times w(u) = (1 - \nu \mu(u)) c'(u) \times w(u).$$

Εύκολα διαπιστώνεται τώρα ότι το μοναδιαίο κάθετο είναι

$$N(u, \nu) = \pm c'(u) \times w(u),$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου ν .

Συνεπώς, αποδείξαμε το ακόλουθο κριτήριο για το πότε μια ευθιογενής επιφάνεια είναι αναπτυκτική.

Πρόταση 8.3.1. Έστω κανονική ευθιογενής παραμετρική επιφάνεια X με παραμετρική παράσταση

$$X(u, \nu) = c(u) + \nu w(u),$$

όπου $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι κανονική καμπύλη με παράμετρο $u \in I$ και

$$w: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

μια λεία διανυσματική απεικόνιση τέτοια ώστε

$$\|w(u)\| = 1 \text{ και } c'(u) \times w(u) \neq 0, \text{ για κάθε } u \in I.$$

Η ευθιογενής παραμετρική επιφάνεια X είναι αναπτυκτική αν και μόνο αν ισχύει

$$\boxed{[c'(u), w(u), w'(u)] = 0, \text{ για κάθε } u \in I.}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η ευθειογενής παραμετρική επιφάνεια

$$X(u, v) = c(u) + vw(u)$$

είναι αναπτυκτική. Τότε υπάρχουν λείες συναρτήσεις $a(u), b(u)$ τέτοιες ώστε

$$w'(u) = a(u)c'(u) + b(u)w(u)$$

για κάθε $u \in I$.

Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι η επιφανειακή καμπύλη c τέμνει κάθετα τις γενέτειρες της ευθειογενούς επιφάνειας, δηλαδή ισχύει

$$\langle c'(u), w(u) \rangle = 0, \text{ για κάθε } u \in I. \quad (8.2)$$

Αφού είναι

$$\|w(u)\| = 1,$$

συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\langle w(u), w'(u) \rangle = 0$$

για κάθε $u \in I$. Κατά συνέπεια, βρίσκουμε ότι

$$b(u) = 0, \text{ για κάθε } u \in I.$$

Δηλαδή είναι

$$w'(u) = a(u)c'(u), \text{ για κάθε } u \in I. \quad (8.3)$$

Επειδή όμως έχουμε

$$X_u(u, v) = (1 + va(u))c'(u),$$

συνάγουμε ότι στα σημεία (u, v) για τα οποία ισχύει

$$1 + va(u) = 0,$$

η παραμετρική επιφάνεια X δεν είναι κανονική.

Εξετάζουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

- Η συνάρτηση $a(u)$ είναι ταυτοτικά μηδέν σε κάποιο διάστημα $I_0 \subseteq I$. Τότε από την ισότητα (8.3) συμπεραίνουμε ότι η διανυσματική απεικόνιση $w(u)$ είναι σταθερή στο I_0 . Επιπλέον, από την ισότητα (8.2) προκύπτει ότι η συνάρτηση $\langle c(u), w(u) \rangle$ είναι σταθερή. Αυτό δείχνει ότι η καμπύλη c είναι επίπεδη και το επίπεδό της είναι ορθογώνιο προς το σταθερό και μοναδιαίο διάνυσμα w . Συνεπώς, πρόκειται περί κυλινδρικής επιφάνειας (βλέπε Παράδειγμα 3.1.5).
- Η συνάρτηση $a(u)$ είναι σταθερή σε κάποιο διάστημα $I_0 \subseteq I$, αλλά όχι ταυτοτικά μηδέν. Τότε στα σημεία $(u, -1/a)$ η παραμετρική επιφάνεια X δεν είναι κανονική. Από την ισότητα (8.3) συνάγουμε ότι

$$w(u) = ac(u) + p_0, \quad \text{όπου } p_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Αυτό όμως δείχνει ότι πρόκειται περί κωνικής επιφάνειας (βλέπε Παράδειγμα 8.1.2).

- Η συνάρτηση $a(u)$ πληροί $a(u) \neq 0$ και $a'(u) \neq 0$ για κάθε u σε κάποιο διάστημα $I_0 \subseteq I$. Θεωρούμε τότε την καμπύλη

$$\tilde{c}: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$\tilde{c}(u) = c(u) - \frac{1}{a(u)}w(u), \quad u \in I_0.$$

Κάνοντας χρήση της ισότητας (8.3), βρίσκουμε ότι

$$\tilde{c}'(u) = \frac{a'(u)}{a^2(u)}w(u).$$

Τούτο σημαίνει ότι η καμπύλη \tilde{c} είναι κανονική. Επιπλέον, οι γενέτιρες της παραμετρικής επιφάνειας X δεν είναι παρά οι εφαπτόμενες ευθείες της καμπύλης \tilde{c} . Άρα, η παραμετρική επιφάνεια είναι η επιφάνεια εφαπτομένων (βλέπε Παράδειγμα 8.1.3) της καμπύλης \tilde{c} (βλέπε Παράδειγμα 8.1.3).

Αποδείξαμε επομένως το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.3.2. Κάθε αναπτυκτική επιφάνεια τοπικά είναι κυλινδρική επιφάνεια, κωνική επιφάνεια ή επιφάνεια εφαπτομένων.

Άμεση συνέπεια του ανωτέρου θεωρήματος, καθώς και του Θεωρήματος 8.2.1, είναι το πόρισμα που ακολουθεί.

Πόρισμα 8.3.3. Κάθε κανονική επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K = 0$, η οποία δεν περιέχει ισόπεδα σημεία, είναι τοπικά κυλινδρική επιφάνεια, κωνική επιφάνεια ή επιφάνεια εφαπτομένων.

Γνωρίζουμε ότι ο ορθός κυκλικός κύλινδρος και το επίπεδο είναι τοπικά ισομετρικές επιφάνειες. Ισχύει το ακόλουθο γενικότερο συμπέρασμα, το οποίο είναι ένα είδος μερικού αντιστρόφου του Εξόχου Θεωρήματος.

Θεώρημα 8.3.4. Κάθε κανονική επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K = 0$, η οποία δεν περιέχει ισόπεδα σημεία, είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο.

Απόδειξη. Έστω S κανονική επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K = 0$, η οποία δεν περιέχει ισόπεδα σημεία. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.2.1, η επιφάνεια S είναι αναπτυκτική. Επιπλέον, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.3.2, η επιφάνεια S είναι τοπικά κυλινδρική επιφάνεια, κωνική επιφάνεια ή επιφάνεια εφαπτομένων. Επομένως, η επιφάνεια S δέχεται τοπικά παραμετρική παράσταση της μορφής

$$X: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(u, v) = c(u) + vw(u),$$

η οποία πληροί τη συνθήκη (8.1). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η παράμετρος u είναι μήκος τόξου για την καμπύλη c και ότι η c τέμνει κάθετα τις γενέτειρες της ευθειογενούς επιφάνειας και επομένως πληρείται η συνθήκη 8.2, δηλαδή ισχύει

$$\langle c'(u), w(u) \rangle = 0$$

για κάθε $u \in I$. Επειδή η επιφάνεια είναι αναπτυκτική, η Πρόταση 8.3.1 συνεπάγεται ότι ισχύει

$$[c'(u), w(u), w'(u)] = 0, \quad \text{για κάθε } u \in I.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ανωτέρω και σύμφωνα με την ανάλυση που έπεται της Πρότασης 8.3.1, έχουμε ότι ισχύει η συνθήκη (8.3).

Τότε, τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της παραμετρικής επιφάνειας X είναι

$$E(u, v) = (1 + va(u))^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1$$

για κάθε $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$.

Θεωρούμε μια καμπύλη

$$\tilde{c}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

του επιπέδου \mathbb{R}^2 με παράμετρο το μήκος τόξου $u \in I$ και πλαίσιο Frenet $\{\tilde{t}(u), \tilde{n}(u)\}$. Κατάλληλα μικρό ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 δύναται να παραμετρηθεί μέσω της απεικόνισης \tilde{X} , η οποία ορίζεται ως

$$\tilde{X}(u, v) = \tilde{c}(u) + v\tilde{n}(u).$$

Για αρκούντως μικρές τιμές της παραμέτρου v , η παραμετρική επιφάνεια \tilde{X} είναι κανονική.

Κάνοντας χρήση των τύπων Frenet για την καμπύλη \tilde{c} , βρίσκουμε ότι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της παραμετρικής επιφάνειας \tilde{X} είναι

$$\tilde{E}(u, v) = (1 - vk(u))^2, \quad \tilde{F}(u, v) = 0, \quad \tilde{G}(u, v) = 1,$$

όπου $k(u)$ είναι η καμπυλότητα της καμπύλης \tilde{c} .

Λόγω του Θεμελιώδους Θεωρήματος της θεωρίας των καμπυλών του \mathbb{R}^2 (Θεώρημα 1.6.1), μπορούμε να επιλέξουμε την καμπύλη \tilde{c} έτσι ώστε να έχει καμπυλότητα $k(u) = -a(u)$. Τότε όμως έχουμε

$$\tilde{E} = E, \quad \tilde{F} = F, \quad \tilde{G} = G.$$

Το συμπέρασμα ότι η επιφάνεια S είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 4.2.2. \square

8.4 Ασκήσεις

1. Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

με

$$X(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- (i) Να αποδειχθεί ότι είναι ευθειογενής επιφάνεια.
 (ii) Είναι αναπτυκτή; Ποιά επιφάνεια είναι αυτή;
2. Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$X(u, v) = (u - h(u - v), u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση.

- (i) Αποδείξτε ότι όλα τα εφαπτόμενα επίπεδά της είναι παράλληλα προς σταθερή διεύθυνση.
 (ii) Υπολογίστε την κάθετη καμπυλότητα σε κάθε σημείο της για την εφαπτομενική διεύθυνση του ερωτήματος (i).
 (iii) Βρείτε την καμπυλότητα Gauss.
 (iv) Είναι η επιφάνεια ευθειογενής;
3. Έστω κανονική επιφάνεια S με απεικόνιση Gauss N . Αποδείξτε ότι μια κανονική επιφανειακή καμπύλη $c: I \rightarrow S$, με παράμετρο $t \in I$, είναι γραμμή καμπυλότητά της επιφάνειας S , αν και μόνο αν η κανονική παραμετρική επιφάνεια

$$X(t, v) = c(t) + vN(c(t))$$

έχει καμπυλότητα Gauss ταυτοτικά μηδέν.

4. Αν μια συνεκτική επιφάνεια S έχει μια οικογένεια επίπεδων ασυμπτωτικών γραμμών οι οποίες δεν είναι ευθείες, τότε η επιφάνεια S είναι τμήμα επιπέδου.
5. Αποδείξτε ότι το μονόχωνο υπερβολοειδές με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

είναι ευθειογενής επιφάνεια. Είναι αναπτυκτή;

Appendices

Παράρτημα Α΄

Ο Ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^n

Θεωρούμε το γνωστό μας Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n , δηλαδή τον n -διάστατο διανυσματικό χώρο

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

όπου $n \geq 1$ είναι φυσικός αριθμός, με πράξεις την πρόσθεση

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

με

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

με

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Η συνήθης βάση του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n είναι η

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

\vdots

$$e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Προφανώς για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^n εφοδιάζεται με το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle \\ \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, x \rangle &\geq 0 \text{ και } \langle x, x \rangle = 0 \text{ μόνο αν } x = 0. \end{aligned}$$

Το μήκος τυχόντος διανύσματος $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ είναι ο αριθμός

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Είναι φανερό ότι

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

και

$$\|x\| = 0 \text{ μόνο αν } x = 0.$$

Επιπλέον είναι γνωστό ότι ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwarz (πότε ισχύει η ισότητα;)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

και η τριγωνική ανισότητα (ανισότητα Minkowski)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Τα διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ καλούνται **κάθετα** (ή **ορθογώνια**, ή **ορθόθετα**) αν ισχύει

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Ένα διάνυσμα x καλείται **μοναδιαίο** αν $\|x\| = 1$.

Μια βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$ του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n καλείται **ορθομοναδιαία** αν ισχύει

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \text{ για κάθε } 1 \leq i, j \leq n,$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, δηλαδή $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$ αν $i \neq j$. Η συνήθης βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του \mathbb{R}^n είναι ένα παράδειγμα ορθομοναδιαίας βάσης.

Κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ γράφεται εύκολα ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων τυχούσας ορθομοναδιαίας βάσης $\{v_1, \dots, v_n\}$, αφού ισχύει

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Η **γωνία** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $v, w \in \mathbb{R}^n$ είναι ο μοναδικός αριθμός $\theta \in [0, \pi]$ ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι ορθογώνια αν και μόνο αν η μεταξύ τους γωνία είναι $\pi/2$.

Η **Ευκλείδεια απόσταση** είναι η συνάρτηση

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$$

με

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

όπου

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ και } y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Η Ευκλείδεια απόσταση πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}d(x, y) &= d(y, x) \\d(x, y) &\geq 0 \text{ και } d(x, y) = 0 \text{ μόνο αν } x = y \\d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z).\end{aligned}$$

Α'.1 Προσανατολισμός στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n

Οι βάσεις του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n θεωρούνται πάντοτε ως διατεταγμένες βάσεις. Είναι γνωστό ότι αν

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ και } \tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$$

είναι δύο (διατεταγμένες) βάσεις του \mathbb{R}^n , τότε υπάρχει πραγματικός $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας (a_{ij}) , γνωστός ως πίνακας μετάβασης από τη μία βάση στην άλλη, τέτοιος ώστε

$$\tilde{v}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i.$$

Θα λέμε ότι η βάση $\tilde{\mathcal{B}}$ έχει τον ίδιο προσανατολισμό με τη βάση \mathcal{B} αν ισχύει $\det(a_{ij}) > 0$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται στο σύνολο των βάσεων του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n μια σχέση ισοτιμίας (ισοδυναμίας) η οποία διαμερίζει το σύνολο των βάσεων σε δύο κλάσεις ισοτιμίας. Καθεμιά από αυτές τις κλάσεις ισοτιμίας καλείται **προσανατολισμός**.

Ο προσανατολισμός στον οποίο ανήκει η συνήθης βάση του \mathbb{R}^n καλείται **θετικός προσανατολισμός**.

Μια βάση ονομάζεται **δεξιόστροφη** αν ανήκει στον θετικό προσανατολισμό, διαφορετικά καλείται **αριστερόστροφη**.

Κάθε γραμμική απεικόνιση $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η οποία είναι ισομορφισμός απεικονίζει κάθε βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ στη βάση

$$\tilde{\mathcal{B}} = A(\mathcal{B}) = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\},$$

όπου

$$\tilde{v}_1 = A(v_1), \dots, \tilde{v}_n = A(v_n).$$

Αν οι βάσεις αυτές \mathcal{B} και $\tilde{\mathcal{B}} = A(\mathcal{B})$ ανήκουν στον ίδιο προσανατολισμό, τότε λέμε ότι ο ισομορφισμός A διατηρεί τον προσανατολισμό, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Εύκολα ελέγχεται ότι ένας ισομορφισμός $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ διατηρεί τον προσανατολισμό μόνο όταν για την ορίζουσά του ισχύει $\det A > 0$, ενώ αντιστρέφει τον προσανατολισμό αν ισχύει $\det A < 0$.

Α'.2 Ισομετρίες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n

Ορισμός Α'.2.1. Μια ισομετρία του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n είναι κάθε απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η οποία διατηρεί την Ευκλείδεια απόσταση, δηλαδή ισχύει

$$d(T(x), T(y)) = d(x, y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Είναι φανερό ότι κάθε ισομετρία είναι 1-1 απεικόνιση. Επιπλέον, είναι φανερό ότι η σύνθεση ισομετριών είναι ισομετρία.

Για κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$T_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ με } T_v(p) = p + v$$

η οποία καλείται παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$. Είναι προφανές ότι η παράλληλη μεταφορά κατά $v = 0$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Η σύνθεση παραλλήλων μεταφορών είναι παράλληλη μεταφορά αφού εύκολα διαπιστώνεται ότι ισχύει

$$T_v \circ T_w = T_{v+w}$$

για κάθε $v, w \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον, επειδή ισχύει

$$T_v \circ T_{-v} = T_0 = T_{-v} \circ T_v,$$

συμπεραίνουμε ότι κάθε παράλληλη μεταφορά T_v αντιστρέφεται, με αντίστροφο την επίσης παράλληλη μεταφορά

$$T_v^{-1} = T_{-v}.$$

Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού ότι κάθε παράλληλη μεταφορά είναι ισομετρία.

Μια γραμμική απεικόνιση $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ καλείται **ορθογώνιος μετασχηματισμός** (ως προς το σύννητες εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n) αν ισχύει

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $Ax = A(x)$ είναι η εικόνα του $x \in \mathbb{R}^n$ μέσω της απεικόνισης A .

Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι μια γραμμική απεικόνιση $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός αν και μόνο αν ο πίνακάς της ως προς μια ορθομοναδιαία βάση του \mathbb{R}^n είναι ορθογώνιος.

Είναι φανερό ότι κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός διατηρεί τα μήκη των διανυσμάτων, άρα και την Ευκλείδεια απόσταση. Κατά συνέπεια, κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός είναι ισομετρία του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n .

Είναι επίσης γνωστό ότι κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός αντιστρέφεται και ότι ο αντίστροφος του είναι επίσης ορθογώνιος μετασχηματισμός. Το σύνολο των ορθογωνίων μετασχηματισμών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n συμβολίζεται με $O(n)$. Είναι προφανές ότι η ταυτοτική απεικόνιση είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, δηλαδή $Id \in O(n)$. Επιπλέον, αν $A, B \in O(n)$, τότε $A \circ B \in O(n)$.

Όλα αυτά αποδεικνύουν ότι το σύνολο $O(n)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων και ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική απεικόνιση Id .

Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ουσιαστικά ότι πέραν των παράλληλων μεταφορών, των ορθογωνίων μετασχηματισμών και τις μεταξύ τους συνθέσεις, δεν υπάρχουν άλλες ισομετρίες του \mathbb{R}^n .

Θεώρημα A'.2.1. Κάθε ισομετρία T του \mathbb{R}^n γράφεται ως σύνθεση $T = T_v \circ A$ μιας παράλληλης μεταφοράς T_v και ενός ορθογωνίου μετασχηματισμού $A \in O(n)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την παράλληλη μεταφορά T_v κατά $v = -T(0)$ και ορίζουμε την απεικόνιση $S = T_v \circ T$. Προφανώς η απεικόνιση S είναι ισομετρία του \mathbb{R}^n , αφού

$$d(S(x), S(y)) = d(x, y) \tag{A'.1}$$

A'.2. ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{R}^n

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ειδικά, επειδή $S(0) = 0$, από την (A'.1) προκύπτει ότι

$$\|S(x)\| = \|x\| \quad (\text{A'.2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Θα αποδείξουμε ότι $S \in O(n)$. Η (A'.1) ισοδυνάμως γράφεται

$$\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|,$$

ή

$$\|S(x)\|^2 - 2\langle S(x), S(y) \rangle + \|S(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (A'.2), τελικώς βρίσκουμε ότι

$$\langle S(x), S(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad (\text{A'.3})$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Από την (A'.3) προκύπτει ότι

$$\langle S(e_i), S(e_j) \rangle = \delta_{ij} \quad \text{για κάθε } 1 \leq i, j \leq n.$$

όπου

$$\{e_1 = (1, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1)\}$$

είναι η συνήθης βάση του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n . Συνεπώς το σύνολο

$$\{S(e_1), \dots, S(e_n)\}$$

είναι ορθομοναδιαία βάση του \mathbb{R}^n .

Κατά συνέπεια, για κάθε $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, το διάνυσμα $S(v)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτής της βάσης ως

$$S(v) = \langle S(v), S(e_1) \rangle S(e_1) + \dots + \langle S(v), S(e_n) \rangle S(e_n),$$

ή ισοδύναμα λόγω της (A'.3)

$$S(v) = v_1 S(e_1) + \dots + v_n S(e_n),$$

απ' όπου εύκολα προκύπτει ότι η S είναι γραμμική απεικόνιση. Το γεγονός ότι $S \in O(n)$ είναι άμεση συνέπεια της (A'.1). \square

Η παραπάνω ανάλυση είναι μοναδική και ο ορθογώνιος μετασχηματισμός A συμβολίζεται με T_* και καλείται γραμμικό μέρος της ισομετρίας T .

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Α'.2.1 είναι ότι κάθε ισομετρία $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη της T^{-1} είναι επίσης ισομετρία.

Συμβολίζουμε το σύνολο των ισομετριών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n με $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Είναι φανερό ότι έχει δομή ομάδας με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων και ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική απεικόνιση. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η ομάδα $O(n)$ αποτελεί υποομάδα της ομάδας $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Για κάθε $A \in O(n)$ ισχύει

$$|\det A| = 1.$$

Αν $\det A = 1$, τότε ο ορθογώνιος μετασχηματισμός A διατηρεί τον προσανατολισμό, ενώ αν $\det A = -1$, τότε αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Θα λέμε ότι μια ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό αν το γραμμικό της μέρος $T_* \in O(n)$ διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό, αντίστοιχα.

Α'.2.1 Ισομετρίες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2

Ειδικά για τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^2 , η περιγραφή των ισομετριών του είναι πολύ απλή.

Για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ θεωρούμε την απεικόνιση

$$R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

η οποία είναι η **στροφή κατά γωνία θ** . Πρόκειται για τη γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας ως προς τη συνήθη βάση

$$\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$$

του \mathbb{R}^2 είναι ο

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Προφανώς $R_\theta \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, αφού ο πίνακας της είναι ορθογώνιος.

Επιπλέον θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$K_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

της οποίας ο πίνακας ως προς τη συνήθη βάση του \mathbb{R}^2 είναι ο

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η απεικόνιση K_θ δεν είναι παρά ο **κατοπτρισμός ως προς την ευθεία** η οποία διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$ και σχηματίζει γωνία $\theta/2$ με το διάνυσμα $e_1 = (1, 0)$. Προφανώς πρόκειται περί ισομετρίας η οποία αντιστρέφει τον προσανατολισμό σε αντίθεση με τις στροφές που τον διατηρούν.

Η ταξινόμηση των ισομετριών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 έχει ως εξής:

Θεώρημα Α'.2.2. Κάθε ισομετρία T του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^2 γράφεται ως σύνθεση $T = T_v \circ A$ μιας παράλληλης μεταφοράς T_v και ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού $A \in O(2)$ ο οποίος είναι είτε στροφή R_θ , είτε κατοπτρισμός K_θ για κάποια γωνία θ .

Η στροφή $J = R_{\pi/2}$ κατά γωνία $\pi/2$ είναι η απεικόνιση

$$J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1).$$

Προφανώς πληροί την ιδιότητα

$$J^2 = -Id,$$

όπου $J^2 = J \circ J$, και καλείται **μιγαδική δομή** (γιατί άραγε;).

Α'.2.2 Ισομετρίες του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3

Έστω ℓ μονοδιάστατος υπόχωρος του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 και $\{v_1, v_2, v_3\}$ μια δεξιόστροφη ορθομοναδιαία βάση τέτοια ώστε ο υπόχωρος ℓ να παράγεται από το διάνυσμα v_3 . Ο ορθογώνιος μετασχηματισμός του \mathbb{R}^3 του οποίου ο πίνακας ως προς τη βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

καλείται **στροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα ℓ** . Προφανώς κάθε στροφή γύρω από τον άξονα είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Ο ορθογώνιος μετασχηματισμός με πίνακα

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

καλείται **ψευδοστροφή** και είναι σύνθεση της στροφής κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα ℓ με τον κατοπτρισμό ως προς το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $(0, 0, 0)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα v_1, v_2 . Είναι προφανές ότι αυτός ο ορθογώνιος μετασχηματισμός αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Η ταξινόμηση των ισομετριών του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 έχει ως εξής:

Θεώρημα A'.2.3. Κάθε ισομετρία T του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^3 γράφεται ως σύνθεση $T = T_v \circ A$, όπου T_v είναι παράλληλη μεταφορά και A είναι είτε στροφή γύρω από κάποιο άξονα, είτε ψευδοστροφή.

A'.2.3 Διανυσματικό και μικτό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3

Το **εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο** $v \times w$ των διανυσμάτων $v = (v_1, v_2, v_3)$ και $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ ορίζεται ως το διάνυσμα

$$v \times w := \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3,$$

ή ισοδύναμα

$$v \times w = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right).$$

Ο ακόλουθος μνημονικός κανόνας είναι χρήσιμος

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

A'.2. ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{R}^n

Το **μικτό γινόμενο** $[v, w, z]$ των διανυσμάτων $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ και $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ ορίζεται ως ο αριθμός

$$[v, w, z] = \langle v \times w, z \rangle.$$

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύεται με στοιχειώδεις πράξεις κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών.

Πρόταση A'.2.4. Για τυχαία διανύσματα $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ και $w \in \mathbb{R}^3$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(i)

$$x \times y = -y \times x,$$

(ii)

$$[x, y, z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

(iii)

$$(x \times y) \times z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x,$$

$$x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z,$$

(iv)

$$\langle x \times y, z \times w \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle x, w \rangle \\ \langle y, z \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix}.$$

(v) Για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό $A \in O(3)$ ισχύει

$$[Ax, Ay, Az] = \varepsilon [x, y, z]$$

και

$$A(x \times y) = \varepsilon Ax \times Ay,$$

όπου $\varepsilon = 1$ αν ο μετασχηματισμός A διατηρεί τον προσανατολισμό και $\varepsilon = -1$ αν τον αντιστρέφει.

Άμεση συνέπεια της Πρότασης A'.2.4(ii) είναι ότι το εξωτερικό γινόμενο $v \times w$ είναι διάνυσμα ορθογώνιο προς αμφότερα τα διανύσματα v και w . Επιπλέον από το σκέλος (iv) προκύπτει η ταυτότητα του Lagrange

$$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2,$$

η οποία μας παρέχει μια άλλη απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

A'.3 Erlanger Programm-Γεωμετρική Ισοτιμία

Ο Felix Klein (1849-1925) το 1872 ανέπτυξε το περίφημο Erlanger Programm, σύμφωνα με το οποίο γεωμετρία, υπό μια πιο ευρεία έννοια, είναι η μελέτη αναλλοιώτων ομάδων μετασχηματισμών που δρουν σε γενικούς χώρους. Τέτοιες αναλλοιώτες μπορεί να είναι γωνίες, εμβαδά, αποστάσεις, καμπυλότητες και άλλα.

Ένα παράδειγμα ομάδας μετασχηματισμών η οποία δρα στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n είναι φυσικά η ομάδα ισομετριών του $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, μετασχηματισμοί δηλαδή που διατηρούν την Ευκλείδεια απόσταση. Η γεωμετρία που παράγει η δράση αυτής της ομάδας δεν είναι άλλη από την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Στο πλαίσιο αυτό δεν έχει νόημα να διακρίνουμε σχήματα (δηλαδή υποσύνολα του \mathbb{R}^n) τα οποία διαφέρουν ως προς ισομετρία του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^n . Έχει επομένως νόημα ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός A'.3.1. Το σχήμα $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ καλείται **γεωμετρικώς ισότιμο** του σχήματος $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^n$ αν υπάρχει ισομετρία $T \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\tilde{\Sigma} = T(\Sigma)$.

Είναι φανερό ότι η γεωμετρική ισοτιμία όπως ανωτέρω ορίστηκε είναι σχέση ισοτιμίας (ισοδυναμίας) στο σύνολο των σχημάτων του \mathbb{R}^n αφού είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική (γιατί;).

Παράρτημα Β΄

Η τοπολογία του \mathbb{R}^n

Β.1 Ανοικτά και κλειστά υποσύνολα

Η Ευκλείδεια απόσταση

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$$

με

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n ως μετρικό χώρο και ακολούθως να ορίσουμε τη **συνήθη τοπολογία** του.

Ονομάζουμε **(ανοικτή) μπάλα** στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n , με **κέντρο** το σημείο $p_0 \in \mathbb{R}^n$ και **ακτίνα** $r > 0$, το σύνολο

$$B_r(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : d(p, p_0) < r\}.$$

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **ανοικτό** υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^n , αν για κάθε σημείο $p_0 \in A$ υπάρχει μπάλα κέντρου p_0 και ακτίνας r τέτοια ώστε $B_r(p_0) \subseteq A$.

Είναι γνωστό ότι η ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο, ενώ η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι επίσης ανοικτό σύνολο.

Το υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **κλειστό** στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n , αν το συμπλήρωμά του $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ είναι ανοικτό στον \mathbb{R}^n .

Ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n το οποίο περιέχει ένα σημείο p συχνά θα αναφέρεται ως **περιοχή** του σημείου p .

Μια απεικόνιση $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , καλείται **συνεχής στο σημείο** $p_0 \in U$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } B_\delta(p_0) \subseteq U \text{ τότε } F(B_\delta(p_0)) \subseteq B_\varepsilon(F(p_0)).$$

Μια απεικόνιση $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ καλείται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της U . Είναι γνωστό ότι η απεικόνιση F είναι συνεχής αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της

$$f_1, \dots, f_m: U \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$F(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p)), \quad p = (x_1, \dots, x_n) \in U,$$

είναι συνεχείς.

Η σύνθεση συνεχών απεικονίσεων είναι συνεχής απεικόνιση. Επιπλέον οι συνεχείς απεικονίσεις αντιστρέφουν ανοικτά σύνολα σε ανοικτά σύνολα και κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα.

B'.2 Επαγόμενη τοπολογία

Κάθε υποσύνολο A του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n καθίσταται τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με την επαγόμενη τοπολογία. Τα ανοικτά σύνολα σε αυτή τη τοπολογία ορίζονται ως εξής: Ένα υποσύνολο $X \subseteq A$ καλείται **ανοικτό στο** A αν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο Y του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n τέτοιο ώστε $X = A \cap Y$.

Είναι γνωστό ότι η ένωση ανοικτών συνόλων στο A είναι ανοικτό σύνολο στο A , ενώ η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων στο A είναι επίσης ανοικτό σύνολο στο A . Ένα ανοικτό υποσύνολο του A το οποίο περιέχει ένα σημείο p συχνά αναφέρεται ως **περιοχή** του p στο A .

Το υποσύνολο $X \subseteq A$ καλείται **κλειστό στο** A αν το συμπλήρωμά του $X^c = A \setminus X$ είναι ανοικτό στο A .

B'.3 Συνεχείς απεικονίσεις

Μια απεικόνιση $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ καλείται **συνεχής στο σημείο** $p_0 \in A$ αν για κάθε περιοχή W του σημείου $F(p_0)$ στον \mathbb{R}^m υπάρχει περιοχή V του σημείου p_0 στο A τέτοια ώστε

$$F(V) \subseteq W.$$

Μια απεικόνιση $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ καλείται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της A . Είναι γνωστό ότι η απεικόνιση F είναι συνεχής αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της

$$f_1, \dots, f_m: A \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$F(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p)), \quad p = (x_1, \dots, x_m) \in A,$$

είναι συνεχείς.

Η σύνθεση συνεχών απεικονίσεων είναι συνεχής απεικόνιση. Επιπλέον οι συνεχείς απεικονίσεις αντιστρέφουν ανοικτά σύνολα σε ανοικτά σύνολα και κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα. Επίσης αν $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής απεικόνιση, τότε και κάθε περιορισμός της $F|_B: B \subseteq A \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι επίσης συνεχής απεικόνιση.

B'.4 Ομοιομορφισμοί

Μια απεικόνιση

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$$

καλείται **ομοιομορφισμός** αν είναι συνεχής, 1-1, επί του B (δηλαδή $F(A) = B$) και η αντίστροφή της

$$F^{-1}: B \rightarrow A$$

είναι επίσης συνεχής. Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο A ονομάζεται **ομοιομορφικό** με το σύνολο B .

Για παράδειγμα, η μοναδιαία σφαίρα

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

είναι ομοιομορφική με το ελλειψοειδές

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

όπου $a, b, c > 0$. Ο μεταξύ τους ομοιομορφισμός είναι ο περιορισμός $F|_{\mathbb{S}^2}: \mathbb{S}^2 \rightarrow E$ της απεικόνισης

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{με} \quad F(x, y, z) = (ax, by, cz).$$

Σημειώνεται ότι η αντίστροφη απεικόνιση ενός ομοιομορφισμού είναι ομοιομορφισμός καθώς και ότι η σύνθεση ομοιομορφισμών είναι ομοιομορφισμός. Είναι εύκολο να αποδειχθεί (πως;) ότι κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια σχέση ισοτιμίας (ισοδυναμίας) στο σύνολο όλων των υποσυνόλων Ευκλειδείου χώρων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ομοιομορφισμοί διατηρούν όλες τις τοπολογικές ιδιότητες.

Οι παράλληλες μεταφορές του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n είναι ομοιομορφισμοί, όπως επίσης και όλες οι ισομετρίες του.

Β'.5 Συνεκτικότητα-συμπαγότητα

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **συνεκτικό** αν δεν υπάρχουν μη κενά υποσύνολά του U_1 και U_2 ανοικτά στο A , τέτοια ώστε

$$A = U_1 \cup U_2 \quad \text{και} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Αν το σύνολο A είναι συνεκτικό, τότε τα μόνα υποσύνολά του τα οποία είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά είναι το ίδιο το σύνολο A και το κενό σύνολο \emptyset . Οι εικόνες συνεκτικών συνόλων μέσω συνεχών απεικονίσεων είναι συνεκτικά σύνολα.

Επιπλέον, είναι γνωστό ότι τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του συνόλου \mathbb{R} , εκτός του κενού συνόλου \emptyset και του ιδίου του \mathbb{R} , είναι μόνο τα διαστήματα.

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **τροχιακά συνεκτικό** αν για τυχόντα σημεία $p, q \in A$ υπάρχει συνεχής καμπύλη $c: [a, b] \rightarrow A$ τέτοια ώστε $c(a) = p$ και $c(b) = q$. Κάθε τροχιακά συνεκτικό υποσύνολο του

Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n είναι συνεκτικό. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **φραγμένο** αν περιέχεται σε μια μπάλα του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n . Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **συμπαγές** αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Ένα σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ καλείται **οριακό σημείο** του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ αν κάθε περιοχή του σημείου p στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του συνόλου A διαφορετικό του p .

Πρόταση B'.5.1. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές.
- (ii) (Heine-Borel) Για κάθε οικογένεια $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n με

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i,$$

υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος δείκτες $i_1, \dots, i_k \in I$ τέτοιοι ώστε

$$A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}.$$

- (iii) (Bolzano-Weierstrass) Κάθε μη πεπερασμένο υποσύνολο του συνόλου A έχει ένα οριακό σημείο το οποίο ανήκει στο σύνολο A .

Οι εικόνες συμπαγών συνόλων μέσω συνεχών απεικονίσεων είναι συμπαγή σύνολα.

Υπενθυμίζουμε ότι οι ομοιομορφισμοί διατηρούν όλες τις τοπολογικές ιδιότητες. Ειδικά, οι ομοιομορφισμοί διατηρούν και τη συνεκτικότητα και τη συμπαγότητα.

Παράρτημα Γ'

Διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ Ευκλειδείου χώρων

Γ'.1 Παραγωγή διανυσματικών απεικονίσεων του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n μιας μεταβλη- τής

Έστω διανυσματική απεικόνιση

$$V: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

με συναρτήσεις συντεταγμένων

$$v_1, \dots, v_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

δηλαδή

$$V(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t)), \quad t \in I.$$

Είναι γνωστό ότι η απεικόνιση V είναι διαφορίσιμη αν και μόνο αν όλες οι συναρτήσεις συντεταγμένων της είναι διαφορίσιμες. Επιπλέον ισχύει

$$V'(t) = \frac{dV}{dt}(t) = (v_1'(t), \dots, v_n'(t)), \quad t \in I.$$

Επίσης είναι γνωστό ότι ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες παραγωγής: Για τυχούσες διαφορίσιμες διανυσματικές απεικονίσεις

$$V, W: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

και διαφορίσιμη συνάρτηση $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι διανυσματικές απεικονίσεις

$$fV: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ με } (fV)(t) = f(t)V(t), \quad t \in I,$$

και

$$\langle V, W \rangle: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \langle V, W \rangle(t) = \langle V(t), W(t) \rangle, \quad t \in I,$$

είναι διαφορίσιμες. Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(fV) &= \frac{df}{dt}V + f\frac{dV}{dt}, \\ \frac{d}{dt}\langle V, W \rangle &= \left\langle \frac{dV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{dW}{dt} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ειδικά για $n = 3$ και για διαφορίσιμες απεικονίσεις

$$V, W, Z: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

οι διανυσματικές απεικονίσεις

$$V \times W: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ με } V \times W(t) = V(t) \times W(t), \quad t \in I,$$

και

$$[V, W, Z]: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } [V, W, Z](t) = [V(t), W(t), Z(t)] \quad t \in I,$$

είναι διαφορίσιμες, όπου $[V(t), W(t), Z(t)]$ είναι το μεικτό γινόμενο των διανυσμάτων $V(t), W(t), Z(t)$. Ισχύουν επιπλέον τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V \times W) &= \frac{dV}{dt} \times W + V \times \frac{dW}{dt}, \\ \frac{d}{dt}[V, W, Z] &= \left[\frac{dV}{dt}, W, Z \right] + \left[V, \frac{dW}{dt}, Z \right] + \left[V, W, \frac{dZ}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Γ'.2 Διαφορίσιμες απεικονίσεις και Διαφορικό απεικόνισης

Μια απεικόνιση $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n , καλείται **διαφορίσιμη στο σημείο** $p_0 \in U$ αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \frac{F(p) - F(p_0) - L(p - p_0)}{\|p - p_0\|} = 0.$$

Είναι γνωστό ότι, αν η απεικόνιση F είναι διαφορίσιμη στο σημείο $p_0 \in U$, τότε είναι και συνεχής στο $p_0 \in U$. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι η γραμμική απεικόνιση $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με την ανωτέρω ιδιότητα είναι μοναδική, καλείται **διαφορικό της απεικόνισης F στο σημείο p_0** και συμβολίζεται με dF_{p_0} ή F'_{*p_0} .

Η απεικόνιση F καλείται **διαφορίσιμη**, αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του ανοικτού συνόλου U . Είναι γνωστό ότι η απεικόνιση F είναι διαφορίσιμη αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της

$$f_1, \dots, f_m: U \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$F(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p)), \quad p = (x_1, \dots, x_n) \in U,$$

είναι διαφορίσιμες. Επιπλέον, αν η απεικόνιση F είναι διαφορίσιμη, τότε υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της σε κάθε σημείο $p \in U$ και ισχύει

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(p) \right), \quad p = (x_1, \dots, x_n) \in U.$$

Είναι επίσης γνωστό ότι κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ Ευκλειδείων χώρων είναι συνεχής.

Η απεικόνιση F καλείται **τάξης C^r** , όπου $r \geq 1$ είναι φυσικός αριθμός, αν υπάρχουν όλες οι μερικές της παράγωγοι έως τάξης r και είναι συνεχείς. Αποδεικνύεται ότι, κάθε C^1 απεικόνιση είναι διαφορίσιμη.

Ο πίνακας του διαφορικού μιας διαφορίσιμης απεικόνισης

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

στο σημείο $p \in U$, ως προς τις συνήθεις βάσεις των Ευκλειδείων χώρων \mathbb{R}^n και \mathbb{R}^m , είναι ο $m \times n$ πίνακας

$$\text{Jac}F(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix},$$

γνωστός ως **Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης F στο σημείο $p \in U$** .

Η ακόλουθη ερμηνεία του διαφορικού είναι χρήσιμη, ακόμη και για υπολογισμούς.

Έστω $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη απεικόνιση και σημείο $p_0 \in U$, όπου U είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n . Η εικόνα $dF_{p_0}(w)$ τυχόντος διανύσματος $w \in \mathbb{R}^n$ μέσω του διαφορικού dF_{p_0} βρίσκεται ως εξής: Θεωρούμε τυχούσα καμπύλη (υπάρχουν άπειρες τέτοιες!)

$$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \text{ με } c(0) = p_0 \text{ και } c'(0) = w.$$

Τότε ισχύει

$$dF_{p_0}(w) = \tilde{c}'(0),$$

όπου

$$\tilde{c}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

είναι η καμπύλη

$$\tilde{c} = F \circ c$$

η οποία προφανώς πληροί $\tilde{c}(0) = F(p_0)$.

Ακριβέστερα, αυτή η θεώρηση μας επιτρέπει να βλέπουμε το διαφορικό της απεικόνισης F στο σημείο $p_0 \in U$ ως τη γραμμική απεικόνιση

$$dF_{p_0}: T_{p_0}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p_0)}\mathbb{R}^m,$$

όπου με $T_p\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε το σύνολο των διανυσμάτων του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n με αφετηρία το τυχόν σημείο $p \in \mathbb{R}^n$.

Σημειώνουμε ότι το σύνολο $T_p\mathbb{R}^n$ καθίσταται κατά φυσικό τρόπο διανυσματικός χώρος, ο οποίος είναι ισόμορφος με τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n μέσω παράλληλης μεταφοράς. Τούτο σημαίνει ότι η συνήθης βάση του \mathbb{R}^n μπορεί να θεωρηθεί ως βάση και του διανυσματικού χώρου $T_p\mathbb{R}^n$. Ο διανυσματικός αυτός χώρος ονομάζεται **εφαπτόμενος χώρος του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n στο σημείο p** .

Παράδειγμα Γ'.2.1. Κάθε παράλληλη μεταφορά $T_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, κατά $v \in \mathbb{R}^n$, είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, της οποίας το διαφορικό σε κάθε σημείο είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Επιπλέον, κάθε γραμμική απεικόνιση είναι διαφορίσιμη και το διαφορικό της σε κάθε σημείο είναι η ίδια η απεικόνιση. Ειδικά, κάθε ισομετρία $T = T_v \circ A \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$,

όπου $A \in O(n)$, είναι διαφορίσιμη και για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$dT_p = A.$$

Με άλλα λόγια το διαφορικό κάθε ισομετρίας είναι το γραμμικό της μέρους.

Πρόταση Γ.2.1 (Κανόνας αλυσίδας). Έστω $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $G: V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ διαφορίσιμες απεικονίσεις, όπου U και V είναι ανοιχτά υποσύνολα των Ευκλειδείων χώρων \mathbb{R}^n και \mathbb{R}^m αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $F(U) \subseteq V$. Τότε η απεικόνιση $G \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι διαφορίσιμη και ισχύει

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \text{ για κάθε σημείο } p \in U.$$

Πρόταση Γ.2.2. Έστω ότι $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, όπου U είναι ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n . Αν ισχύει

$$df_p = 0, \text{ για κάθε σημείο } p \in U,$$

τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Γ.3 Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης

Θεώρημα Γ.3.1. Έστω ότι $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια C^1 απεικόνιση, όπου U είναι ανοιχτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n . Υποθέτουμε ότι για σημείο $p \in U$ το διαφορικό $dF_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός. Τότε υπάρχει περιοχή $V \subseteq U$ του σημείου p και περιοχή $W \subseteq F(U)$ του σημείου $F(p)$, τέτοιες ώστε ο περιορισμός $F|_V: V \rightarrow W$ να αντιστρέφεται και η αντίστροφή της $(F|_V)^{-1}: W \rightarrow V$ να είναι C^1 απεικόνιση.

Μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του Ευκλειδείου χώρου \mathbb{R}^n καλείται **διαφορομορφισμός**, αν αντιστρέφεται και η αντίστροφή της είναι επίσης διαφορίσιμη. Επειδή κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση είναι συνεχής, είναι φανερό ότι κάθε διαφορομορφισμός είναι και ομοιομορφισμός (το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει, γιατί;).

Σημειώνεται ότι η αντίστροφη απεικόνιση ενός διαφορομορφισμού είναι διαφορομορφισμός καθώς και η σύνθεση διαφορομορφισμών είναι διαφορομορφισμός. Κάθε ισομετρία του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^n είναι διαφορομορφισμός.

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Αντίστροφης Απεικόνισης, προκύπτει ότι κάθε C^1 απεικόνιση $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι τοπικός διαφορομορφισμός, αν το διαφορικό της είναι ισομορφισμός σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Παράρτημα Δ'

Αυτοπροσηρητημένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί

Θυμίζουμε ότι αν V είναι \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος διάστασης n , εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

τότε μια γραμμική απεικόνιση $A: V \rightarrow V$ καλείται **αυτοπροσηρητημένος γραμμικός μετασχηματισμός** του διανυσματικού χώρου V αν ισχύει

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \text{ για κάθε } x, y \in V.$$

Σε κάθε αυτοπροσηρητημένο γραμμικό μετασχηματισμό A αντιστοιχεί μια απεικόνιση

$$\beta_A: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \beta_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle, \text{ } x, y \in V.$$

Προφανώς η απεικόνιση β_A είναι διγραμμική. Επειδή ο γραμμικός μετασχηματισμός A είναι αυτοπροσηρητημένος, έχουμε επιπλέον ότι

$$\beta_A(x, y) = \beta_A(y, x), \text{ για κάθε } x, y \in V.$$

Με άλλα λόγια, η απεικόνιση β_A είναι συμμετρική διγραμμική μορφή με αντίστοιχη τετραγωνική μορφή

$$Q_A: V \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$Q_A(x) = \beta_A(x, x) = \langle Ax, x \rangle, \quad x \in V.$$

Σημειώνουμε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\beta_A(x, y) = \frac{1}{2} (Q_A(x+y) - Q_A(x) - Q_A(y)), \quad x, y \in V,$$

η οποία δείχνει ότι η τετραγωνική μορφή προσδιορίζει κατά μοναδικό τρόπο την αντίστοιχη συμμετρική διγραμμική μορφή.

Είναι γνωστό ότι οι αυτοπροσηρτημένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί έχουν πραγματικές ιδιοτιμές και διαγωνιοποιούνται από ορθομοναδιαία βάση. Στη συνέχεια θα προβούμε σε μια απόδειξη αυτών των ιδιοτήτων στην περίπτωση όπου $\dim V = n = 2$. Μάλιστα θα διαπιστώσουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της αντίστοιχης τετραγωνικής μορφής, όταν την περιορίσουμε στο μοναδιαίο κύκλο.

Λήμμα Δ'.0.1. Έστω A αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός του διδιάστατου διανυσματικού χώρου $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Αν η τετραγωνική μορφή Q_A περιορισμένη στο μοναδιαίο κύκλο

$$\{w \in V : \|w\| = 1\}$$

λαμβάνει ολικό μέγιστο $\lambda = Q_A(e)$ στο e , τότε το διάνυσμα e είναι ιδιοδιάνυσμα του γραμμικού μετασχηματισμού A με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda = Q_A(e)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ορθομοναδιαία βάση $\{e_1 = e, e_2\}$ του διανυσματικού χώρου V . Κάθε διάνυσμα $w \in V$ με $\|w\| = 1$ γράφεται ως

$$w = \cos t e_1 + \sin t e_2, \quad \text{με } t \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} f(t) &= Q_A(\cos t e_1 + \sin t e_2) \\ &= Q_A(e_1)(\cos t)^2 + 2\langle Ae_1, e_2 \rangle \cos t \sin t + Q_A(e_2)(\sin t)^2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Από υπόθεση, η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $t = 0$ μέγιστο

$$f(0) = \lambda = Q_A(e).$$

Επειδή $f'(0) = 0$, βρίσκουμε

$$\langle Ae_1, e_2 \rangle = 0.$$

Όμως τότε είναι

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \langle Ae_1, e_1 \rangle e_1 + \langle Ae_1, e_2 \rangle e_2 \\ &= \langle Ae_1, e_1 \rangle e_1 \\ &= Q_A(e_1)e_1, \end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα Δ'.0.2. Έστω A αυτοπροσηρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός του διδιάστατου διανυσματικού χώρου V εφοδιασμένου με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Τότε υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, e_2\}$ του διανυσματικού χώρου V αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του γραμμικού μετασχηματισμού A , δηλαδή

$$\boxed{Ae_1 = \lambda_1 e_1 \text{ και } Ae_2 = \lambda_2 e_2,}$$

όπου

$$\boxed{\lambda_1 = \max\{Q_A(w) : w \in V \text{ με } \|w\| = 1\}}$$

και

$$\boxed{\lambda_2 = \min\{Q_A(w) : w \in V \text{ με } \|w\| = 1\}.$$

Απόδειξη. Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή Q_A είναι προφανώς συνεχής, οπότε περιορισμένη στο μοναδιαίο κύκλο

$$\{w \in V : \|w\| = 1\}$$

λαμβάνει ολικό μέγιστο $\lambda_1 = Q_A(e_1)$ για κάποιο e_1 στο μοναδιαίο κύκλο. Από το Λήμμα Δ'.0.1 γνωρίζουμε ότι το e_1 είναι ιδιοδιάνυσμα του γραμμικού μετασχηματισμού A με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_1 = Q_A(e_1)$.

Θεωρούμε μοναδιαίο διάνυσμα e_2 ορθογώνιο στο διάνυσμα e_1 . Τότε είναι

$$\begin{aligned} Ae_2 &= \langle Ae_2, e_1 \rangle e_1 + \langle Ae_2, e_2 \rangle e_2 \\ &= \langle Ae_2, e_2 \rangle e_2 \\ &= Q_A(e_2)e_2. \end{aligned}$$

Επομένως, το διάνυσμα e_2 είναι ιδιοδιάνυσμα του γραμμικού μετασχηματισμού A με αντίστοιχη ιδιοτιμή

$$\lambda_2 = Q_A(e_2) \leq \lambda_1.$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι αυτή είναι η ελάχιστη τιμή της τετραγωνικής μορφής Q_A στο μοναδιαίο κύκλο. Πράγματι, για τυχόν

$$w = xe_1 + ye_2 \text{ με } \|w\| = 1$$

έχουμε

$$\begin{aligned} Q_A(w) &= Q_A(e_1)x^2 + 2\langle Ae_1, e_2 \rangle xy + Q_A(e_2)y^2 \\ &= \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \\ &\geq \lambda_2 x^2 + \lambda_2 y^2 \\ &= \lambda_2 (x^2 + y^2) \\ &= \lambda_2. \end{aligned}$$

Συνεπώς λ_2 είναι η ελάχιστη τιμή και η απόδειξη είναι πλήρης. \square

Παρατήρηση Δ'.0.1. Ας θεωρήσουμε έναν αυτοπροσηρτημένο γραμμικό μετασχηματισμό A ενός διδιάστατου διανυσματικού χώρου V ο οποίος είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Η τετραγωνική μορφή Q_A καλείται **θετικώς** (αντίστοιχα, **αρνητικώς**) **οριστική** αν ισχύει

$$Q_A(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in V \setminus \{0\}$$

(αντίστοιχα,

$$Q_A(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in V \setminus \{0\}.)$$

Η τετραγωνική μορφή Q_A καλείται **θετικώς** (αντίστοιχα, **αρνητικώς**) **ημιοριστική** αν ισχύει

$$Q_A(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in V$$

και υπάρχει ένα διάνυσμα $y \in V \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε

$$Q_A(y) = 0$$

(αντίστοιχα,

$$Q_A(x) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in V$$

και υπάρχει ένα διάνυσμα $y \in V \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε

$$Q_A(y) = 0).$$

Η τετραγωνική μορφή Q_A καλείται **αόριστη** αν υπάρχουν διανύσματα $x, y \in V \setminus \{0\}$ τέτοια ώστε

$$Q_A(x) < 0 \text{ και } Q_A(y) > 0.$$

Αν $\{e_1, e_2\}$ είναι ορθομοναδιαία βάση του διανυσματικού χώρου V αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του γραμμικού μετασχηματισμού A , με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1 \geq \lambda_2$ (βλέπε Θεώρημα Δ'.0.2), τότε για τυχόν διάνυσμα

$$w = xe_1 + ye_2$$

έχουμε

$$Q_A(w) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2.$$

Από αυτό προκύπτει ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η τετραγωνική μορφή Q_A είναι θετικώς (αντίστοιχα, αρνητικώς) οριστική αν και μόνο αν ισχύει $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ (αντίστοιχα, $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2$).
- Η τετραγωνική μορφή Q_A είναι θετικώς (αντίστοιχα, αρνητικώς) ημιοριστική αν και μόνο αν ισχύει $\lambda_1 \geq \lambda_2 = 0$ (αντίστοιχα, $0 = \lambda_1 \geq \lambda_2$).
- Η τετραγωνική μορφή Q_A είναι αόριστη αν και μόνο αν ισχύει $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$.

Παρατήρηση Δ'.0.2. Σημειώνουμε ότι ιδιοδιανύσματα ενός αυτοπροσηρτημένου γραμμικού μετασχηματισμού που αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

Βιβλιογραφία

- [1] James Aslina, *The Peano curve of Schoenberg is nowhere differentiable*. J. Approx. Theory **33** (1981), 28-42.
- [2] Manfredo P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall 1976.
- [3] Δημητρίου Κουτροφιώτη, *Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία*. Πανεπιστημιακά Κείμενα, Εκδόσεις Leader Books, 2006.
- [4] Sebastián Montiel and Antonio Ros, *Curves and surfaces*. Graduate Studies in Mathematics, Volume 69, American Mathematical Society, 2009.
- [5] Barrett O' Neil, *Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002.
- [6] Andrew Pressley, *Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2011.