Κεφάλαιο 1

Προκαταρκτικές Μαθηματικές Έννοιες

1.1 Διανύσματα

Ας θυμηθούμε λοιπόν ξανά την έννοια του διανύσματος. Από το Λύκειο γνωρίζουμε ότι το **διάνυσμα** είναι μια ποσότητα που έχει *μέτρο*, *διεύθυνση* και *φορά*. Επίσης, γνωρίζουμε ότι σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ένα διάνυσμα αναπαρίσταται από μια τριάδα πραγματικών αριθμων. Πράγματι, έστω ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θα γράφεται

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3, \tag{1.1}$$

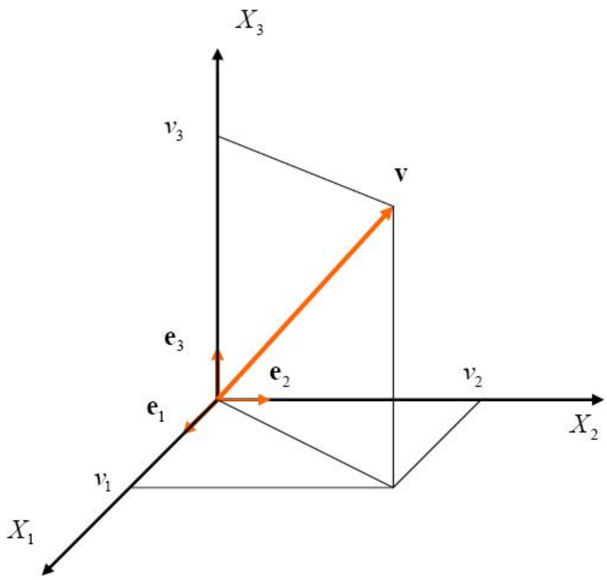
όπου τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$ είναι τρία γραμμικά ανεξάρτητα, μοναδιαία και ορθογώνια μεταξύ τους διανύσματα, δηλαδή αποτελούν μια *ορθοκανονική βάση* του τρισδιάστατου Ευκλείδιου χώρου.

Για μια δεδομένη *βάση* (δηλαδή για ένα δεδομένο σύστημα συντεταγμένων), υπάρχει μια ακριβώς τριάδα αριθμών (εν προκειμένω τα v_1, v_2 και v_3) οι οποίοι αναπαριστούν το διάνυμα $\mathbf{v}$. Γι' αυτό συχνά παραλείπουμε τα διανύσματα βάσης και γράφουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3). \tag{1.2}$$

Οι αριθμοί v_1, v_2 και v_3 προκύπτουν από την προβολή του διανύσματος $\mathbf{v}$ στους άξονες X_1, X_2 και X_3, αντιστοίχως όπως φαίνεται και από το Σχήμα 1.1. Η προβολή όμως του διανύσματος $\mathbf{v}$ στον άξονα X_1, όπως μάθαμε από το αντίστοιχο μάθημα των Μαθηματικών, δίνεται από το **εσωτερικό γινόμενο**:

$$v_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1, \tag{1.3}$$



Σχήμα 1.1. *Το σύστημα συντεταγμένων* $X_1X_2X_3$ *και η βάση* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

καθώς επίσης και οι προβολές του $\mathbf{v}$ στους δύο υπόλοιπους άξονες δίνονται από τις σχέσεις

$$v_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2, \quad v_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3. \tag{1.4}$$

Έτσι τελικά το διάνυσμα $\mathbf{v}$ να γράφεται από τη σχέση (1.1)

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3, \tag{1.5}$$

Αν γνωρίζουμε τις συνιστώσες ενός διανύσματος, δηλαδή εκείνη την τριάδα αριθμών στην οποία αναφερθήκαμε παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα το **εσωτερικό γινόμενο** μεταξύ δυο διανυσμάτων. Έστω, για παράδειγμα, ένα δεύτερο διάνυσμα $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, τότε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ θα δίνεται από την έκφραση

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \tag{1.6}$$

Επίσης, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το *μέτρο* και τη *διεύθυνση* ενός διανύσματος. Θα συμβολίζουμε με $|\mathbf{v}|$ (ή απλώς με v) το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{v}$. Όταν είναι γνωστές οι συνιστώσες ενός διανύσματος, το μέτρο του υπολογίζεται ως εξής:

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{1.7}$$

Αν πάρουμε υπόψη τη σχέση (1.6), είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ισχύει η παρακάτω σχέση

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

Η διεύθυνση ενός διανύσματος καθορίζεται από τις γωνίες που σχηματίζει αυτό το διάνυσμα με τους τρεις άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Τα αντίστοιχα συνημίτονα των γωνιών αυτών αναφέροντα ως *συνημίτονα κατεύθυνσης*:

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)}{|\mathbf{v}|}, \qquad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{e}_2) = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{v}|}, \qquad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{e}_3) = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{v}|}. \tag{1.8}$$

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.8) να αποδείξετε ότι για τον $\mathrm{I\!R}^2$ ισχύει

$$\tan\theta = \frac{v_2}{v_1},$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\mathbf{v}$ με τον άξονα X_1.

Το εξωτερικό γινόμενο

Σημαντική παρατήρηση: Πρέπει να σημειώσουμε ότι ένα διάνυσμα είναι κάτι παραπάνω από τις συνιστώσες του. Για να το πούμε διαφορετικά: οι συνιστώσες ενός διανύσματος αναπαριστούν πλήρως το διάνυσμα μόνο όταν *δίνεται η βάση του συστήματος συντεταγμένων*. Αυτό σημαίνει ότι *η διατεταγμένη τριάδα αριθμών που αποτελούν τις συνιστώσες ενός διανύσματος αλλάζει με την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων.* Ας το δούμε με ένα παράδειγμα στο επίπεδο, δηλαδή στον διδιάστατο χώρο $\mathrm{I\!R}^2$.

Παράδειγμα Έστω ένα συστημα συντεταγμένων με άξονες X_1, X_2 και ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ το οποίο γράφεται σε αυτό το σύστημα συντεταγμενων ως εξής:

$$\mathbf{v} = \sqrt{2}\ \mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\ \mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

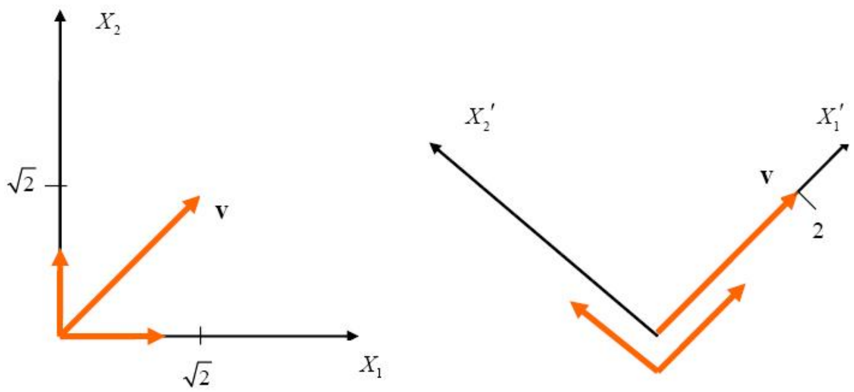
όπου $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ η βάση του συστήματος συντεταγμένων. Έστω τώρα ένα δεύτερο σύστημα με άξονες X_1', X_2' το οποίο σχηματίζει γωνία 45 μοιρών με το πρώτο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Τότε το ίδιο διάνυσμα θα γράφεται στο συστημα συντεταγμένων X_1', X_2':

$$\mathbf{v} = (2, 0) = 2\ \mathbf{e}_1' + 0\ \mathbf{e}_2',$$

όπου $\mathbf{e}_1'$ και $\mathbf{e}_2'$ τα διανύσματα βάσης του δεύτερου συστήματος συντεταγμένων. Παρατηρήστε ότι το μέτρο του διανύσματος παραμένει αναλλοίωτο από την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων.

1.2 Διανυσματικές συναρτήσεις

Μέχρι τώρα αντιμετωπίζαμε τα διανύσματα ως σταθερές ποσότητες. Όπως όμως ένα βαθμωτό μέγεθος μπορεί νά είναι είτε μια σταθερά είτε μια μεταβλητή, κατά τον ίδιο τρόπο



Σχήμα 1.2. *Το διάνυσμα* $\mathbf{v}$ *σε δυο διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων* X_1X_2 *και* $X_1'X_2'$.

ένα διάνυσμα μπορεί να είναι ένα *σταθερό διάνυσμα* ή μια *διανυσματική μεταβλητή*. Αφού έχουμε διανυσματικές μεταβλητές, μπορούμε να "φτειάξουμε" διανυσματικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα στη συνάρτηση

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x})), \tag{1.9}$$

η διανυσματική μεταβλητή $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ η διανυσματική μεταβλητή $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ αποτελεί την εξαρτημένη μεταβλητή της συνάρτησης (1.9). Πρόκειται δηλαδή για μια **διανυσματική συνάρτηση με διανυσματική ανεξάρτητη μεταβλητή**. Δηλαδή, εν προκειμένω, η συνάρτηση μας "δουλεύει" ως εξής:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.10}$$

ή πιο αναλυτικά

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3)) \tag{1.11}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι οι συνιστώσες της $\mathbf{f}$ είναι τρεις διαφορετικές **βαθμωτές** συναρτήσεις που η καθεμιά έχει τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές. Με πιο απλά λόγια μια διανυσματική συνάρτηση (σε ένα σύστημα συντεταγμένων) είναι μια τριάδα βαθμωτών συναρτήσεων. Ας γίνουμε πιο συγκεκριμένοι με ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα Έστω η διανυσματική συνάρτηση με διανυσματική ανεξάρτητη μεταβλητή

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(x_1^3 + 5x_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \cos(x_2/x_3)\right), \; x_3 \neq 0. \tag{1.12}$$

Προφανώς, η παραπάνω διανυσματική συνάρτηση αποτελείται από τις τρεις παρακάτω βαθμωτές συναρτήσεις (διανυσματικής μεταβλητής):

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= f_1(x_1, x_3) = x_1^3 + 5x_3, \\ f_2(\mathbf{x}) &= f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ f_3(\mathbf{x}) &= f_3(x_2, x_3) = \cos(x_2/x_3). \end{aligned}$$

Στο μάθημα αυτό μας ενδιαφέρουν κυρίως οι **διανυσματικές συναρτήσεις με ανέξαρτητη βαθμωτή μεταβλητή**, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής

$$t \mapsto \mathbf{f}(t), \quad \text{ή} \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(t), \tag{1.13}$$

όπου t είναι η ανεξάρτητη βαθμωτή μεταβλητή και $\mathbf{f}(t)$ η αντίστοιχη εικόνα της. Πιο απλά η παραπάνω συνάρτηση γράφεται:

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \tag{1.14}$$

όπου $f_1(t)$, $f_2(t)$ και $f_3(t)$ αποτελούν τις *συνιστώσες συναρτήσεις* της $\mathbf{f}$.

Παράδειγμα διανυσματικής συνάρτησης βαθμωτής μεταβλητής. Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{f}(t) = (t^2, \cos t, \sin t). \tag{1.15}$$

Προφανώς οι τρεις συνιστώσες συναρτήσεις είναι:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t^2, \\ f_2(t) &= \cos t, \\ f_3(t) &= \sin t. \end{aligned}$$

1.3 Παραγώγιση και ολοκλήρωση διανυσματικών συναρτήσεων

Αφού μιλήσαμε για συναρτήσεις είναι εύλογο να αναρωτήθούμε τί γίνεται με την παράγωγο και την ολοκλήρωση των διανυσμάτικών συναρτήσεων. Ας ξεκινήσουμε από τις διανυσματικές συναρτήσεις με βαθμωτή ανξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής (1.14). Εφόσον έχουμε μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή την t, ας δούμε πρώτα την συνήθη παράγωγο της $\mathbf{f}$ ως προς t:

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \left(\frac{df_1}{dt}, \frac{df_2}{dt}, \frac{df_3}{dt} \right). \tag{1.16}$$

Μ' άλλα λόγια, για να παραγωγίσουμε μια διανυσματική συνάρτηση δεν έχουμε παρά να παραγωγίσουμε τις συνιστώσες συναρτήσεις μία προς μία.

Παράδειγμα Η συνήθης παράγωγος της συνάρτησης (1.15) έχει ως εξής

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = (2t, -\sin t, \cos t) \, .$$

Για να ολοκληρώσουμε τέτοιες συναρτήσεις δεν έχουμε παρά να ολοκληρώσουμε μία προς μία τις συνιστώσες της

$$\int \mathbf{f}(t)dt = \left(\int f_1(t)dt, \int f_2(t)dt, \int f_3(t)dt \right) . \tag{1.17}$$

Παράδειγμα Το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης (1.15) υπολογίζεται αντίστοιχα:

$$\int \mathbf{f}(t)dt = \left(\int t^2 dt, \int \cos t dt, \int \sin t dt \right) = \left(\frac{t^3}{3} + c_1, \sin t + c_2, -\cos t + c_3 \right) ,$$

όπου c_1, c_2 και c_3 αυθαίρετες - αλλά διαφορετικές μεταξύ τους εν γένει - σταθερές που προκύπτουν η κάθε μια από την ολοκλήρωση της αντίστοιχης συνιστώσας.

Ας περάσουμε τώρα στην παραγώγιση μιας διανυσματικής συνάρτησης με διανυσματική ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή μια συνάρτηση της μορφής (1.9)-(1.11). Εν προκειμένω έχουμε τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές: τις x_1, x_2 και x_3, επομένως δεν έχει νόημα η συνήθης παράγωγος. Αντίθετα έχει νόημα να αναζητήσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Για παράδειγμα, η μερική παράγωγος ως προς την πρώτη ανεξάρτητη μεταβλητή δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) . \tag{1.18}$$

Ανάλογα υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους ως προς τις άλλες δύο ανεξάρτητες μεταβλητές

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right) \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) . \tag{1.20}$$

Παράδειγμα Ας υπολογίσουμε τώρα τις μερικές παραγώγους της διανυσματικής συνάρτησης (1.12)

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) = \left(3x_1^2, 2x_1, 0\right)$$
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) = \left(0, 2x_2, \frac{-1}{x_3}\sin(x_2/x_3)\right)$$
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) = \left(5, 2x_3, \frac{-x_2}{x_3^2}\sin(x_2/x_3)\right).$$

Για την ολοκλήρωση μια διανυσματικής συνάρτησης της μορφής (1.9), θα περιοριστούμε σε μια απλή νύξη. Επειδή έχουμε τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές, ορίζεται το τριπλό ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε ένα χωρίο Ω του τρισδιάστατου χώρου $\mathbb{R}^3$, τότε το ολοκλήρωμα της $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ γράφεται

$$\int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x})dv = \left(\int_\Omega f_1(x_1, x_2, x_3)dv, \int_\Omega f_2(x_1, x_2, x_3)dv, \int_\Omega f_3(x_1, x_2, x_3)dv\right). \tag{1.21}$$

Στην ουσία, και σ' αυτή την περίπτωση, ολοκληρώνουμε κατά συνιστώσα.

1.4 Καμπύλες και τροχιές

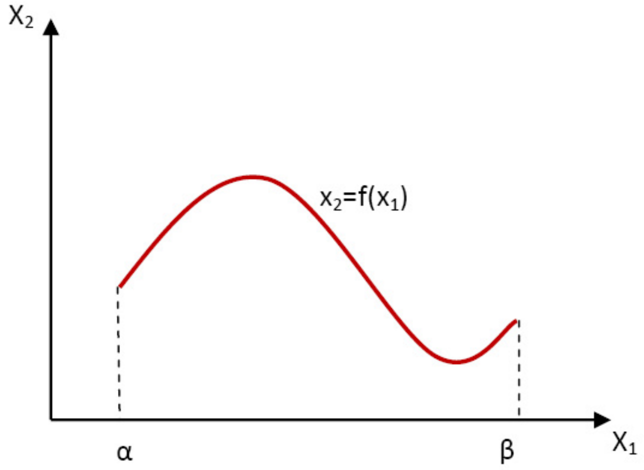
Στο μάθημα αυτό θα μας απασχολήσουν οι τροχιές υλικών σημείων στον τρισδιάστατο χώρο ή στο επίπεδο. Επομένως είναι χρήσιμο να κατανοούμε τη μαθηματική περιγραφή των καμπυλών στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$. Ο πιο απλός τρόπος να γράψουμε μια καμπύλη στο επίπεδο είναι να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της συνάρτησης μιας μεταβλητής ή όπως θα την αποκαλούμε τώρα για να την διακρίνουμε από τις διανυσματικές συναρτήσεις, της **βαθμωτής συνάρτησης μιας ανεξάρτητης βαθμωτής μεταβλητής**. Γνωρίζουμε πολύ καλά ότι το γράφημα της αναπαριστά μια καμπύλη (Σχ. 1.3).

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $x_2 = f(x_1)$ που δίνεται από τη σχέση

$$x_2 = f(x_1) = \sqrt{4 - x_1^2}, \quad -2 \le x_1 \le 2 \tag{1.22}$$

αναπαριστά το άνω ημικύκλιο ενός κύκλου ακτίνας 2 με κέντρο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.4. Αν θελήσουμε να αναπαραστήσουμε ολόκληρο τον κύκλο του Σχήματος 1.4, θα χρειαστούμε και μια δεύτερη συνάρτηση που θα απεικονίζει το κάτω ημικύκλιο

$$x_2 = g(x_1) = -\sqrt{4 - x_1^2}, \quad -2 \le x_1 \le 2. \tag{1.23}$$



Σχήμα 1.3. *Το γράφημα της συναρτήσης $x_2 = f(x_1)$ είναι μια καμπύλη.*

Γίνεται έτσι φανερό ότι κάθε καμπύλη δεν είναι πάντοτε δυνατό να αναπαρίσταται από μια μόνο συνάρτηση. Χρειαζόμαστε επομένως έναν άλλο τρόπο για την πλήρη μαθηματική αναπαράσταση των καμπυλών. Αυτό μπορεί να γίνει με δυο τρόπους: α. Με τη βοήθεια μιας εξίσωσης δύο μεταβλητών β. Με την παραμετρική αναπαράσταση.

1.4.1 Αναπαράσταση καμπύλης με εξίσωση δύο μεταβλητών

Σε αντίθεση με μια εξίσωση μιας μεταβλητής, οι εξισώσεις με δύο μεταβλητές μπορούν να έχουν άπειρες λύσεις. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα μια γραμμική εξίσωση δύο μεταβλητών

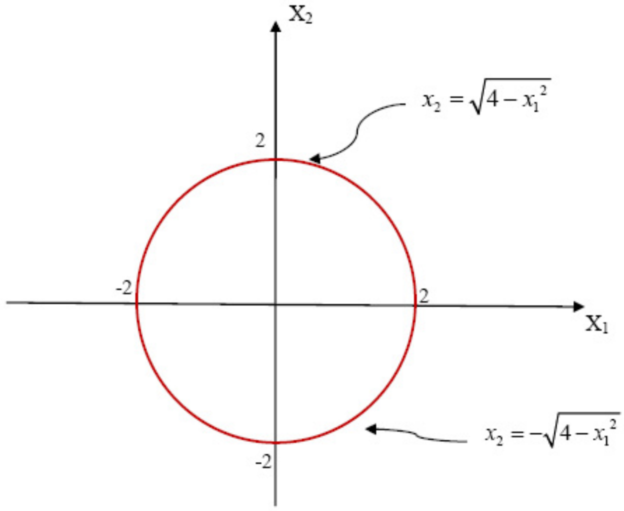
$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0, \tag{1.24}$$

όπου α, β και γ είναι δοσμένες μή-μηδενικές σταθερές. Γνωρίζουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσεις αυτής, δηλαδή όλα τα ζεύγη των πραγματικών αριθμών που μηδενίζουν την εξίσωση (1.24) είναι σημεία του επιπέδου που βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία. Γι' αυτό όταν βλέπουμε μια εξίσωση αυτής της μορφής την αποκαλούμε *εξίσωση ευθείας*. Γενικότερα, αν μια εξίσωση δύο μεταβλητών της μορφής

$$F(x_1, x_2) = 0 \tag{1.25}$$

είναι αρκετά ομαλή, τότε αυτή αντιπροσωπεύει μια καμπύλη στο επίπεδο X_1X_2. Το πιο γνωστό παράδειγμα μια τέτοιας αναπαράστασης είναι ο κύκλος. Θεωρείται γνωστό ότι η εξίσωση κύκλου έχει την ακόλουθη γενική μορφή:

$$(x_1 - \alpha)^2 + (x_2 - \beta)^2 - \rho^2 = 0, \tag{1.26}$$



Σχήμα 1.4. *Ο κύκλος αντιστοιχεί στα γραφήματα δύο διαφορετικών συναρτήσεων*

όπου α, β και ρ σταθερές, είναι ο κύκλος με ακτίνα ρ και κέντρο στο (α, β).

Η αναπαράσταση μιας καμπύλης με τη μορφή της (1.25) καθιστά πολύ εύκολο τον υπολογισμό του *μοναδιαίου κάθετου προς την καμπύλη διανύσματος*. Πράγματι γνωρίζουμε ότι το

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) \tag{1.27}$$

είναι ένα διάνυσμα κάθετο προς τη καμπύλη, επομένως το μοαναδιαίο διάνυσμα θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}. \tag{1.28}$$

Παράδειγμα Ολόκληρη η καμπύλη του Σχήματος 1.4 περιγράφεται από την εξίσωση

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2^2 = 0. \tag{1.29}$$

Αν επιλύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς x_2 θα καταλήξουμε στις λύσεις:

$$x_2 = \pm\sqrt{4 - x_1^2}, \tag{1.30}$$

δηλαδή μία για κάθε ημικύκλιο όπως ακριβώς και οι συναρτήσεις (1.22) και (1.23) της προηγούμενης παραγράφου. Επίσης το μοναδίαιο κάθετο προς τον κύκλο διάνυσμα θα είναι σύμφωνα με την (1.28):

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{\sqrt{4x_1^2 + 4x_2^2}}(2x_1, 2x_2).$$

Παρατήρηση Σημειώνουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν μόνο για *επίπεδες καμπύλες*, δηλαδή γαι καμπύλες που "ζουν" στον δισδιάστατο χώρο. Αν, κατά ανάλογο τρόπο, θελήσουμε να περιγράψουμε μια καμπύλη του τρισδιάστατου χώρου, τότε χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις με τρεις μεταβλητές η κάθε μια. Μ' άλλα λόγια το σύστημα των δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0,$$
$$G(x_1, x_2, x_3) = 0$$

αντιπροσωπεύει μια καμπύλη που, εν γένει, δε "χωρά" στο επίπεδο και χρειάζεται έναν ευρύτερο χώρο για να την φιλοξενήσει, δηλαδή τον $\mathbb{R}^3$.

1.4.2 Παραμετρική αναπαράσταση καμπυλών

Η παραμετρική αναπαράσταση μιας επιπεδης καμπύλης γίνεται με δυο ομαλές συναρτήσεις που αμφότερες εξαρτόνται από μια μεταβλητή που αποτελεί την παράμετρο της αναπαράστασης. Γενικώς, η παραμετρική περιγραφή μιας καμπύλης έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\tau), \\ x_2 &= f_2(\tau), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2] \end{aligned} \tag{1.31}$$

Αν επιθυμούμε την παραμετρική περιγραφή μιας καμπύλης στον τρισδιάστατο χώρο, τότε θα χρειαστούμε μια επιπλέον συνάρτηση

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\tau), \\ x_2 &= f_2(\tau), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2] \\ x_2 &= f_2(\tau). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Παράδειγμα Ο κύκλος του τελευταίου παραδείγματος έχει την ακόλουθη παραμετρική περιγραφή:

$$\begin{aligned} x_1(\varphi) &= 2\cos\varphi, \\ x_2(\varphi) &= 2\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \end{aligned} \tag{1.33}$$

όπου φ είναι η παράμετρος της αναπαράστασης. Οι παραμετρικές εξισώσεις (1.33) και η εξίσωση (1.29) περιγράφον το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο: τόν κύκλο ακτίνας 2, με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Επομένως σχετίζονται μεταξύ τους και με κάποιον τρόπο θα υπάρχει μετάβαση από την μια μορφή στην άλλη. Πράγματι, αν υψώσουμε τις (1.33) στο τετράγωνο και προσθέσουμε κατά μέλη, παίρνουμε

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi \\ &= 4\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) \\ &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 4, \end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στην εξίωση (1.29).

Παρατήρηση Αξίζει να παρατηρήσετε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_1(\psi) &= 2\cos(4\psi), \\ x_2(\psi) &= 2\sin(4\psi), \quad \psi \in [0, \pi/2), \end{aligned} \tag{1.34}$$

με παράμετρο αυτή τη φορά το ψ, αναπαριστούν τον ίδιο ακριβώς κύκλο. Κατά συνέπεια η παραμετρική περιγραφή (1.33) δεν είναι μοναδική και είναι δυνατόν με αλλαγή της παραμέτρου να επιτυγχάνουμε άλλες αναπαράστάσεις του ίδιου κύκλου.

1.5 Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Στην Παράγραφο 1.3 παρουσιάσαμε ολοκληρώματα βαθμωτών ή διανυσματικών συναρτήσεων που τα σύνολα Ω επι των οποίων ολοκληρώνουμε είναι *χωρία* του $\mathbb{R}$, του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$. Σ' αυτή την παράγραφο θα υπενθυμίσουμε πως ολοκληρώνουμε μια βαθμωτή ή διανυσματική συνάρτηση *επί μιας καμπύλης*, θα εξετάσουμε δηλαδή το λεγόμενο **επικαμπύλιο ολοκήρωμα**.

Έστω μια καμπύλη C με παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\tau), \\ x_2 &= x_2(\tau), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2] \\ x_3 &= x_3(\tau) \end{aligned} \tag{1.35}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{r}(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau)), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{1.36}$$

Το διαφορικό της $\mathbf{r}$ είναι επίσης μια διανυσματική συνάρτηση που δίνεται από τη σχέση

$$d\mathbf{r}(\tau) = (dx_1(\tau), dx_2(\tau), dx_3(\tau)) = (x_1'(\tau)d\tau, x_2'(\tau)d\tau, x_3'(\tau)d\tau). \tag{1.37}$$

Από γεωμετρική άποψη μπορούμε να βλέπουμε το διάνυσμα $d\mathbf{r}$ ως μια "μικρή" μετατόπιση επί της καμπύλης C που αντιστοιχεί σε μια μεταβολή της παραμέτρου κατά $d\tau$.

Έστω τώρα μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f}$ που είναι καλά ορισμένη επι της καμπύλης C, δηλαδή έχει νόημα να γράφουμε

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(\tau)), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{1.38}$$

Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\mathbf{f}$ επί της C γράφεται

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}. \tag{1.39}$$

Η τελεία μεταξύ της $\mathbf{f}$ και του $d\mathbf{r}$ στην (1.39) είναι το σύμβολο του εσωτερικού γινομένου, επομένως η τελευταία γράφεται

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_C f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3. \tag{1.40}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (1.37) για να μετατρέψουμε το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα που ξέρουμε να το υπολογίζουμε. Πράγματι

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_C f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(f_1 x_1' + f_2 x_2' + f_3 x_3'\right) d\tau. \tag{1.41}$$

Οι f_1, f_2 και f_3 που εμφανίζονται στην υπό ολοκλήρωση ποσότητα της (1.41) μπορούν να γραφούν συναρτήσει του τ όπως φαίνεται εύκολα από την (1.38). Δηλαδή ολόκληρη η ποσότητα που βρίσκεται στην παρένθεση της (1.41) μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση του τ και, συνεπώς, το ορισμένο ολ0κλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί.

Παράδειγμα Έστω η επίπεδη καμπύλη C η οποία έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\cos 2\tau, \\ x_2 &= 4\sin 2\tau, \quad \tau\in[0,\pi] \end{aligned} \tag{1.42}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{r}(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau)) = (2\cos 2\tau, 4\sin 2\tau)\,, \quad \tau\in[0,\pi], \tag{1.43}$$

Επίσης δίνεται η διανυσματική συνάρτηση:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)) = \left(x_1^3 + x_1x_2, x_1^2 + x_2\right) \tag{1.44}$$

Εστω τα σημεία P_1, P_2 και P_3 της καμπύλης C που αντιστοιχούν στις τιμές της παραμέτρου 0, $\pi/2$ και π, δηλαδή στα διανύσματα $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(\pi/2)$ και $\mathbf{r}(\pi)$, αντιστοίχως. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \tag{1.45}$$

και

$$\int_{P_1}^{P_3} \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \tag{1.46}$$

Το διαφορικό της $\mathbf{r}$ γράφεται

$$d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2) = (x_1'(\tau)d\tau, x_2'(\tau)d\tau) = (-4\sin(2\tau)d\tau, 8\cos(2\tau)d\tau)\,. \tag{1.47}$$

Επίσης η διανυσματική συνάρτηση (1.43) μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= (f_1, f_2) = \left(x_1^3 + x_1x_2, x_1^2 + x_2\right) \\ &= \left((2\cos 2\tau)^3 + (2\cos 2\tau)(4\sin 2\tau), (2\cos 2\tau)^2 + 4\sin 2\tau\right). \end{aligned} \tag{1.48}$$

Έτσι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (1.46) γράφεται

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_3} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{P_1}^{P_3} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \\ &= \int_{P_1}^{P_3} (x_1^3 + x_1 x_2) dx_1 + (x_1^2 + x_2) dx_2, \end{aligned} \tag{1.49}$$

η οποία με τη βοήθεια των (1.46) και (1.47) γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_3} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi} \big(8\cos^3(2\tau) + 2\cos(2\tau)4\sin(2\tau)\big) \left(-4\sin(2\tau) d\tau\right) \\ &\quad + \big(4\cos^2(2\tau) + 4\sin(2\tau)\big) \left(8\cos(2\tau) d\tau\right) \\ &= \int_0^{\pi} \big(-32\cos^3(2\tau)\sin(2\tau)\big)\, d\tau + \int_0^{\pi} \big(-32\cos(2\tau)\sin^2(2\tau)\big)\, d\tau \\ &\quad + \int_0^{\pi} \big(32\cos^3(2\tau)\big)\, d\tau + \int_0^{\pi} \left(32\sin(2\tau)\cos(2\tau)\right) d\tau \\ &= -16 \int_0^{\pi} \big(\cos^3(2\tau)\sin(2\tau) + \cos(2\tau)\sin^2(2\tau)\big)\, d(2\tau) \\ &\quad +16 \int_0^{\pi} \big(\cos^3(2\tau) + \sin(2\tau)\cos(2\tau)\big)\, d(2\tau). \end{aligned}$$

Αν κάνουμε την αλλαγή $s = 2\tau$ στην μεταβλητή ολοκλήρωσης, η τελευταία σχέση γίνεται

$$\int_{P_1}^{P_3} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 16 \left[\int_0^{2\pi} \big(-\cos^3 s \sin s - \cos s \sin^2 s\big)\, ds + \int_0^{2\pi} \big(\cos^3 s + \sin s \cos s\big)\, ds \right].$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι τα τελευταία ολοκληρώματα είναι μηδέν, επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\int_{P_1}^{P_3} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Αντίστοιχα υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (1.45):

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 16 \left[\int_0^{\pi} \big(-\cos^3 s \sin s - \cos s \sin^2 s\big)\, ds + \int_0^{\pi} \big(\cos^3 s + \sin s \cos s\big)\, ds \right].$$