Κεφάλαιο 2

Κινηματική

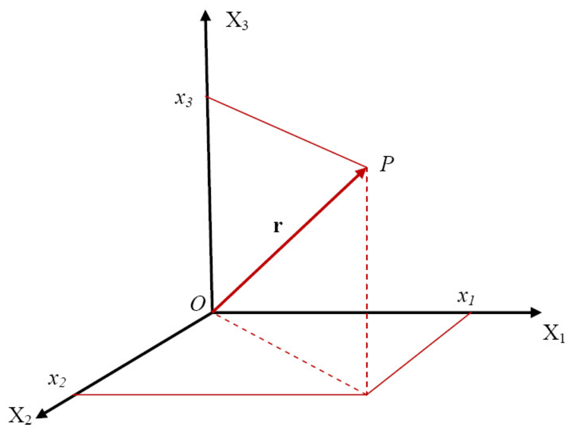
Η κινηματική μελετά τη κίνηση ενός υλικού σημείου ανεξάρτητα από το αίτιο (τις δυνάμεις) που προκαλεί αυτή την κίνηση. Υπάρχουν ποσότητες που σχετίζονται με την κίνηση καθαυτή και δεν χρειάζονται την επίκληση της έννοιας της δύναμης. Οι ποσότητες αυτές που ονομάζονται *κινηματικές* θα εισαχθούν και θα εξεταστούν σ' αυτό το κεφάλαιο. Θα εισάγουμε λοιπόν τις θεμελιώδεις έννοιες της κινηματικής που είναι η *θέση*, η *ταχύτητα* και η *επιτάχυνση*.

2.1 Το διάνυσμα θέσης

Ο χώρος στον οποίο λαμβάνουν χώρα τα φαινόμενα που εξετάζουμε (δηλαδή η κίνηση ενός υλικού σημείου ή ενός στερεού σώμστος) είναι ο φυσικός τρισδιάστατος χώρος που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας. Ένα καλό μαθηματικό πρότυπο γι' αυτό τον χώρο είναι ο λεγόμενος τρισδιάστατος Ευκλείδιος χώρος (συμβολίζεται $\mathbb{E}^3$), που δεν είναι τίποτα άλλο από τον τρισδιάστο χώρο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένο με την Ευκλείδια γεωμετρία. Φυσικά, ο χώρος της κλασσικής επίπεδης γεωμετρία (επιπεδομετρίας) είναι ο $\mathbb{E}^2$.

Έστω ένα υλικό σημείο που βρίσκεται στ θέση P στον τρισδιάστατο χώρο. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ του οποίου η αρχή βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων λέγεται **διάνυσμα θέσης** του υλικού σημείου και θα συμβολίζεται με $\mathbf{r}$. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.1, το $\mathbf{r}$ θα αναλύεται στις συνιστώσες $x_1,\ x_2$ και x_3:

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \tag{2.1}$$



Σχήμα 2.1. *Το διάνυσμα θέσης περιγράφει πλήρως τη θέση οτυ υλικού σημείου στο χώρο.*

ή πιο απλά

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \tag{2.2}$$

Το διάνυσμα $\mathbf{r}$ περιγράφει πλήρως τη θέση ενός υλικού σημείου που βρίσκετει σε "ηρεμία".

Τι γίνεται όμως όταν ένα υλικό σημείο κινείται και αλλάζει συνεχώς θέση στο χώρο; Τότε προφανως το διάνυσμα θέσης θα είναι διαφορετικό κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή θα εξαρτάται από το χρόνο. Έστω η κίνηση ενός υλικού σημείου κατά το χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$. Τότε είναι εύλογο να γράψουμε

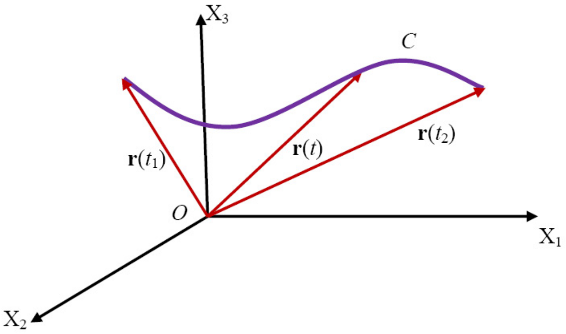
$$\mathbf{r}(t), \quad t \in [t_1, t_2] \tag{2.3}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad t \in [t_1, t_2]. \tag{2.4}$$

Παρατηρήστε ότι (2.4) αποτελείται από τρεις συναρτήσεις του χρόνου t. Επομένως από μαθηματική άποψη συνιστούν την παραμετρική περιγραφή μιας καμπύλης στον τρισδιάστατο χώρο (δες Παρ 1.4.2, Εξ. (1.32)). Ουσιαστικά πρόκειται για την καμπύλη C που διαγράφει το υλικό σημείο καθώς κινείται στον $\mathbb{E}^3$ όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.2. Την καμπύλη αυτή στη Μηχανική την ονομάζουμε **τροχιά** του υλικού σημείου.

Αν η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ είναι γνωστή, ουσιαστικά γνωρίζουμε τη θέση του υλικού μας σημείου σε κάθε χρονική στιγμή. Δηλαδή η $\mathbf{r}(t)$ *περιγράφει πλήρως τη κίνηση* του υλικού σημείου στο χώρο και γι' αυτό συχνά αναφέρεται ως **κίνηση** του υλικού σημείου. Είναι εκείνη τη συνάρτηση που σε τελική ανάλυση αναζητούμε σε κάθε πρόβλημα και που αν την βρούμε μπορούμε να προβλέψουμε τη θέση του κινητού σε κάθε χρονική στιγμή στο μέλλον ή ακόμη να υπολογίζουμε τη θέση που είχε στο παρελθόν.



Σχήμα 2.2. *Η τροχιά του υλικού σημείου περιγράφεται από την καμπύλη* $C\ :\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ t \in [t_1, t_2]$.

Παράδειγμα Η θέση ενός υλικού σημείου κατά τη κίνησή του περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos 3t\ \mathbf{e}_1 + 2\sin 3t\ \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Να αναλύσετε τη κίνησή του.

Από την παραπάνω εξίσωση φαίνεται ότι

$$x_1(t) = 2\cos 3t, \quad x_2(t) = 2\sin 3t, \quad x_3(t) = 1.$$

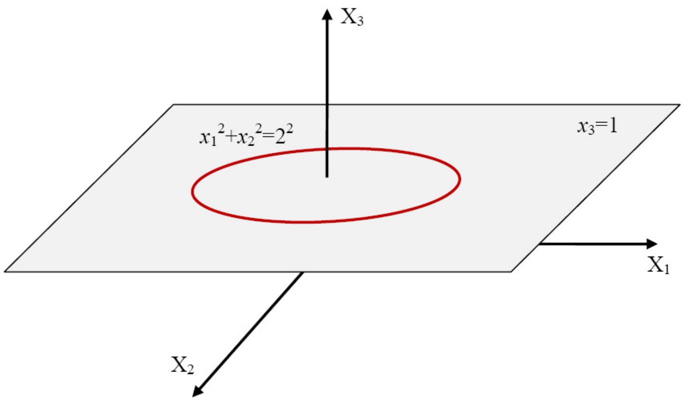
Από την τρίτη συνάρτηση προκύπτει ότι το x_3 είναι σταθερό. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση διεξάγεται στο επίπεδο $x_3 = 1$, δηλαδή σ' ένα επίπεδο που είναι παράλληλο προς το X_1OX_2 και απέχει προς τα πάνω απόσταση 1 μονάδας μήκους από αυτό (Σχήμα 2.3). Πάνω σε αυτό το επίπεδο η κίνηση είναι κυκλική με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 2, αφού από τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει η *παραμετρική αναπαράσταση* (συνέκρινε με Εξ. 1.33):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2\cos 3t, \\ x_2(t) &= 2\sin 3t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Αν παρατηρήσουμε το διάστημα στο οποίο "τρέχει" ο χρόνος t, θα συμπεράνουμε ότι το υλικό σημείο θα διαγράψει τον κύκλο τρεις φορές.

2.2 Η ταχύτητα και η επιτάχυνση

Γνωρίζουμε ότι ο ταχύτητα ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της θέσης ή ακριβέστερα ως η *χρονική παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης της θέσης*. Άρα, μπορούμε να ορίσουμε



Σχήμα 2.3. *Το επίπεδο $x_3 = 1$ και ο κύκλος $x_1^2 + x_2^2 = 4$ επί του επιπέδου αυτού.*

ως **ταχύτητα** την επίσης διανυσματική συνάρτηση:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (v_1(t), v_2(t), v_3(t)) \,, \tag{2.5}$$

όπου

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{dx_1}{dt} \\ v_2(t) &= \frac{dx_2}{dt} \\ v_3(t) &= \frac{dx_3}{dt}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

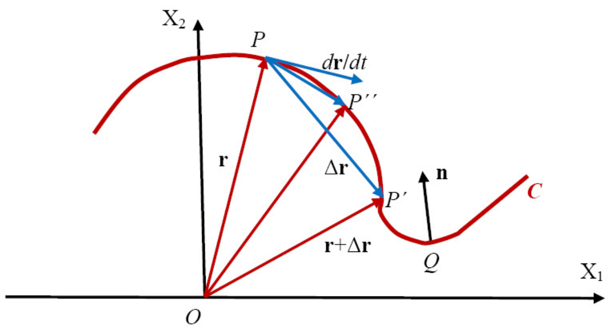
Σημειώστε ότι η παραγώγιση γίνεται κατά συνιστώσα, δηλαδή παραγωγίζουμε μία - μία τις συνιστώσες της $\mathbf{r}$, όπως ακριβώς προβλέπει η Εξ. (1.16). Επειδή η παράγωγος ως προς το χρόνο απαντάται πολύ συχνά στη Μηχανική, χρησιμοποιούμε ειδικό συμβολισμό για να τη γράφουμε:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)) \,, \tag{2.7}$$

Επειδή η θέση δίνεται από μια διανυσματική συνάρτηση (Εξ. 2.4), αξίζει να εξετάσουμε λεπτομερέστερα αυτή την παράγωγο. Έστω C η τροχιά ενός υλικού σημείου το οποίο στη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση P με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$. Έστω επίσης ότι μετά από ένα χρονικό διάστημα Δt βρίσκεται στη θέση P' με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OP'} = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. Προφανώς, το νέο διάνυσμα θέσης (στο P') προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$$

όπως φαίνεται από το Σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4. *Το διάνυσμα της ταχύτητας* $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ *είναι κατά μήκος της εφαπτομένης στο σημείο* P.

Μπορούμε να ορίσουμε τώρα την μέση ταχύτητα για το χρονικό διάστημα Δt που αντιστοιχεί στη κίνηση του υλικού σημείου από το P έως το P':

$$\mathbf{v}_\mu = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{2.8}$$

Από την Εξ. (2.8) προκύπτει ότι η μέση ταχύτητα $\mathbf{v}_\mu$ και το $\Delta\mathbf{r}$ είναι συγραμμικά, δηλαδή η διεύθυνση της μέσης ταχύτητας είναι κατά μήκος του διανύσματος $\Delta\mathbf{r}$. Μ' άλλα λόγια, η μέση ταχύτητα είναι στη διεύθυνση της χορδής PP' και όχι κατά μήκος της τροχιάς (δηλαδή του τόξου PP'). Αν όμως πάρουμε ένα μικρότερο χρονικό διάστημα, η νέα θέση του υλικού σημείου είναι το P', που είναι εγγύτερα στο σημείο P, και η χορδή PP'' "πλησιάζει" το τόξο PP'', δηλαδή την τροχιά. Αν πάρουμε το όριο της μέσης ταχύτητας καθώς το Δt τείνει στο μηδέν, θα φτάσουμε στην παράγωγο, δηλαδή στη στιγμιαία ταχύτητα.

$$\lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{v}_\mu = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}. \tag{2.9}$$

Παρατηρήστε στο Σχήμα 2.4 ότι, στο όριο, η στιγμιαία ταχυτητα δεν είναι πλέον κατά μήκος κάποιας χορδής, αλλά κατά μήκος της εφαπτομένης στο σημείο P.

Η **επιτάχυνση** είναι ένα άλλο διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται ως η χρονική παράγωγος της ταχύτητας

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{2.10}$$

'Ετσι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \dot{v}_1(t) = \ddot{x}_1(t) \\ \alpha_2(t) &= \dot{v}_2(t) = \ddot{x}_2(t) \\ \alpha_3(t) &= \dot{v}_3(t) = \ddot{x}_3(t). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Δεν είναι υποχρεωτικό η ταχύτητα και η επιτάχυνση να δίνονται ή να αναζητώνται πάντα ως συναρτήσεις του χρόνου. Πολλές φορές, για παράδειγμα, η επιτάχυνση μπορεί να δοθεί ως μια συνάρτηση της θέσης $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})$. Αυτή η σχέση δεν έρχεται σε αντίθεση με την Εξ. (2.10), αφού μπορεί με μια απλή σύνθεση της $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})$ με την $\mathbf{r}(t)$ να μας δώσει την επιτάχυνση ως συνάρτηση του χρόνου:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}(t)). \tag{2.12}$$

Παράδειγμα Σε μια μονοδιάστατη κίνηση η ταχύτητα έχει τη μορφή $v_1(x_1) = 3x_1^{2/3}$. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση.

Επειδή το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο, δεν είναι αναγκαία η χρήση δεικτών. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$v(x) = 3x^{2/3} \tag{2.13}$$

Η επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της αλυσιδωτής παραγώγισης:

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = 3\frac{2}{3}x^{-1/3}3x^{2/3} = 6x^{1/3},$$

όπου η παράγωγος $v'(x)$ υπολογίστηκε με τη βοηθεία της εξ. (2.13). Προσέξτε ότι βρήκαμε την επιτάχυνση ως συνάρτηση του x, δηλαδή ως συνάρτηση της θέσης. Αν επιμένουμε να την υπολογίσουμε ως προς το χρόνο, τότε πρέπει να ολοκληρώσουμε την έκφραση της ταχύτητας, αφού πρώτα χωρίσουμε τις μεταβλητές

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow 3x^{2/3} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x^{-2/3}dx = 3dt.$$

Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την τελευταία εξίσωση

$$\int x^{-2/3}dx = \int 3dt \Rightarrow \frac{x^{1/3}}{1/3} = 3t + c \Rightarrow x^{1/3} = t + c,$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Όταν το αποτέλεσμα προκύπτει μετά από μια ολοκλήρωση, θα εμφανίζεται πάντα μια αυθαίρετη σταθερά. Για να υπολογιστεί πλήρως η συνάρτηση της θέσης απαιτείται επιπλέον μια αρχική συνθήκη. Αν, για παράδειγμα, μας έδιναν την πληροφορία ότι κατά την αρχική στιγμή ($t = 0$), το υλικό σημείο ευρίσκετο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, δηλαδή αν $x(0) = 0$, τότε εύκολα υπολογίζεται ότι η σταθερά c είναι μηδέν και η συνάρτηση θέσης γίνεται

$$x^{1/3} = t \Rightarrow x(t) = t^3.$$

Παράδειγμα Η τροχιά ενός υλικού σημείου δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= 3e^{-2t} \\ x_2 &= 4\sin 3t \\ x_3 &= 5\cos 3t \end{aligned}$$

Να υπολογιστούν (α) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση. (β) Το μέτρο της ταχύτητας κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Η κίνηση του υλικού σημείου περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$\mathbf{r}(t) = \left(3e^{-2t}, 4\sin 3t, 5\cos 3t\right).$$

Έτσι, η ταχύτητα και η επιτάχυνση υπολογίζονται με τη σειρά τους:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) &= (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)) \\ &= \left(-6e^{-2t}, 12\cos 3t, -15\sin 3t\right)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}(t) &= (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t)) \\ &= \left(12e^{-2t}, -48\sin 3t, -45\cos 3t\right).\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 0$

$$\mathbf{v}(0) = \dot{\mathbf{r}}(0) = (-6, 12, 0)$$

και στη συνέχεια το μέτρο της

$$v(0) = \sqrt{v_1(0)^2 + v_2(0)^2 + v_3(0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 12^2} = \sqrt{180} \approx 13.4.$$

2.2.1 Το φυσικό σύστημα συντεταγμένων

Έστω ότι η τροχιά ενός υλικού σημείου δίνεται από την καμπύλη C του Σχήματος 2.5. Όπως έχουμε ήδη πει η καμπύλη περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = x_3(t), \quad t \in [t_1, t_2] \tag{2.14}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ t \in [t_1, t_2]. \tag{2.15}$$

Παρατηρήστε ότι ο φυσικός χρόνος t αποτελεί την παράμετρο της καμπύλης C. Όμως, η παράμετρος που χρησιμοποιείται για την περιγραφή μιας καμπύλης δεν είναι μοναδική. Μια οποιαδήποτε ομαλή και μονότονη συνάρτηση

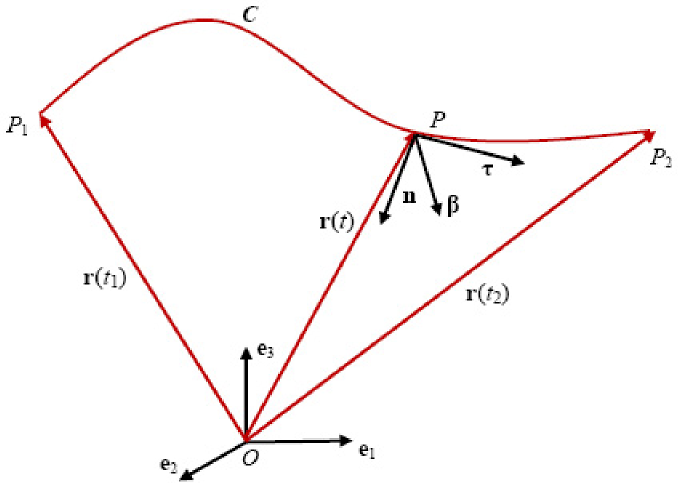
$$s = s(t), \quad t \in [t_1, t_2], \tag{2.16}$$

αποτελεί μια **αλλαγή παραμέτρου** στη μαθηματική περιγραφή της καμπύλης. Πράγματι, με τη σύνθεση $\mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$, οι παραμετρικές εξισώσεις γίνονται

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),\ s \in [s_1, s_2], \tag{2.17}$$

όπου $s_1 = s(t_1)$ και $s_2 = s(t_2)$.

Σημειώνουμε ότι η εξ. (2.17) μολονότι είναι διαφορετική από την εξ. (2.15) παριστούν το ίδο ακριβώς γεωμετρικό αντικείμενο, δηλαδή την καμπύλη C η οποία δεν επηρεάζεται από τις αλλαγές παραμέτρου. Αν το s *μετρά το μήκος της καμπύλης από το αρχικό σημείο* P_1,



Σχήμα 2.5. *Τα διανύσματα* **τ**, **n** *και* **β** *συγκροτούν το φυσικό σύστημα συντεταγμένων.*

τότε η συνάρτηση $s = s(t)$ παριστά μια στάνταρ για τη Μηχανική αλλαγή παραμέτρου και η νέα παράμετρος s αναφέρεται ως **μήκος τόξου**. Προφανώς τότε θα ισχύει $s_1 = s(t_1) = 0$ και $s_2 = s(t_2)$ θα είναι το συνολικό μήκος της τροχιάς.

Μπορούμε τώρα να "ξαναδούμε" την κίνηση του υλικού σημείου ως προς τη νέα παράμετρο s. Ας ξεκινήσουμε από την παράγωγο της

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{2.18}$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\tau}$ είναι εφαπτόμενο προς την τροχιά C (Σχ. 2.5) όπως εξηγήσαμε στην παράγραφο 2.2 και έχει μοναδιαίο μέτρο διότι

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \mathbf{v}\frac{1}{v} \Rightarrow |\boldsymbol{\tau}| = \tau = 1, \tag{2.19}$$

όπου στην τρίτη ισότητα της (2.19) χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \tag{2.20}$$

Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας, ακόμη και στη γενική περίπτωση που εξετάζεται εδώ, *εξακολουθεί να είναι ο ρυθμός μεταβολής (χρονική παράγωγος) της απόστασης που διανύει το κινητό*, ανεξάρτητα αν αυτό κινείται σε ευθεία ή σε οποιαδήποτε καμπύλη τροχιά.

Επίσης από την εξ. (2.19) γίνεται φανερό ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\tau}$ είναι συγγραμμικό με την ταχύτητα $\mathbf{v}$ και συνδέεται μαζί της μέσω της σχέσης

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \Rightarrow \mathbf{v} = \upsilon\boldsymbol{\tau}. \tag{2.21}$$

Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι η δεύτερη παράγωγος της $\mathbf{r}(s)$, δηλαδή η $\boldsymbol{\tau}'$, είναι ορθογώνια προς την $\boldsymbol{\tau}$. Πράγματι, αφού είναι γνωστό ότι το $\boldsymbol{\tau}$ είναι μοναδιαίου μέτρου θα ισχύει

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|^2 = 1. \tag{2.22}$$

Επομένως, αν παραγωγίσουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}\right) = 0 \qquad &\Rightarrow \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\cdot\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0 \\ &\Rightarrow 2\boldsymbol{\tau}'(s)\cdot\boldsymbol{\tau}(s) = 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

δηλαδή τα διανύσματα $\boldsymbol{\tau}'$ και $\boldsymbol{\tau}$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους και επειδή το $\boldsymbol{\tau}$ είναι εφαπτόμενο προς την τροχιά, το $\boldsymbol{\tau}'$ θα είναι κάθετο προς αυτή όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5. Μ' άλλα λόγια, η παράγωγος της $\boldsymbol{\tau}$ μπορεί να γραφεί

$$\boldsymbol{\tau}' = |\boldsymbol{\tau}'|\mathbf{n} = k\mathbf{n}, \tag{2.24}$$

όπου $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο, κάθετο προς την τροχιά διάνυσμα και k μια σταθερά που αντιπροσωπεύει το μέτρο της $\boldsymbol{\tau}'$. Η εξ. (2.24) γράφεται επίσης

$$\boldsymbol{\tau}' = k\mathbf{n} = \frac{1}{R}\mathbf{n}, \tag{2.25}$$

όπου προφανώς $k = 1/R$. Τόσο το k όσο και το R έχουν σαφή γεωμετρική ερμηνεία, το πρώτο αναφέρεται ως *καμπυλότητα* και το δεύτερο ως *ακτίνα καμπυλότητας*.

Τα διανύσματα $\boldsymbol{\tau}$ και $\mathbf{n}$ είναι πάντα ορθογώνια μεταξύ τους. Μπορούμε να ορίσουμε ένα τρίτο μοναδιαίο διάνυσμα, ορθογώνιο και προς τα δύο με τη βοήθεια του εξωτερικού γινομένου:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau}\times\mathbf{n}. \tag{2.26}$$

Έτσι, τα μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\tau}$ και $\mathbf{n}$ συγκροτούν ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που αναφέρεται ως **φυσικό σύστημα συντεταγμένων**.

2.2.2 Η ταχύτητα και η επιτάχυνση στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων

Το φυσικό σύστημα συντεταγμένων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της κίνησης. Μ' άλλα λόγια, μπορούμε να γράψουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ως προς αυτό.

Μάλιστα, αυτό το έχουμε ήδη κάνει για την ταχύτητα. Πράγματι, ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας στη (2.21) την οποία ξαναγράφουμε:

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}. \tag{2.27}$$

Δηλαδή στο φυσικό σύστημα η ταχύτητα έχει μία μόνο συνιστώσα κατά το $\boldsymbol{\tau}$, που δεν είναι καθόλου παράξενο, αφού γνωρίζουμε από την προηγούμενη παράγραφο ότι το διάνυσμα της ταχύτητας είναι συγγραμικό με την εφαπτομένη, άρα είναι συγγραμμικό με το $\boldsymbol{\tau}$. Για την επιτάχυνση ξεκινούμε από τον ορισμό της

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}, \tag{2.28}$$

όπου στην παραπάνω μεταβάση χρησιμοποιήσαμε απλώς την εξ. (2.27). Ο τελευταίος όρος της (2.28) υπολογίζεται εύκολα με τη βοήθεια της αλυσιδωτής παραγώγισης και της εξ. (2.25)

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\mathbf{n}v \tag{2.29}$$

Δεν μένει παρά να εισάγουμε την τελευταία σχέση στην εξ. (2.28)

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \tag{2.30}$$

Η (2.28) αναπαριστά την επιταχύνση στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων. Η συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά το εφάπτομενο διάνυσμα $\boldsymbol{\tau}$ θα λέγεται **εφαπτομενική επιτάχυνση**, ενώ η αντίστοιχη συνιστώσα κατά την κάθετη προς την τροχιά ονομάζεται **κεντρομόλος επιτάχυνση**.

Παρατηρήστε ότι η επιτάχυνση θα βρίσκεται πάντοτε στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\boldsymbol{\tau}$ και $\mathbf{n}$, δηλαδή η συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά τον τρίτο άξονα του φυσικού συστήματος, δηλαδή κατά τον $\boldsymbol{\beta}$, είναι πάντοτε μηδέν.

Παράδειγμα Έστω υλικό σημείο του οποίου η κίνηση περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{r}(t) = (4\cos 2t, 4\sin 2t, 0)\,. \quad t \in [0, \pi]$$

Η παραπάνω συνάρτηση αντιστοιχεί στις παραμετρικές συναρτήσεις

$$\begin{aligned} x &= 4\cos 2t, \\ y &= 4\sin 2t, \quad t \in [0, \pi] \\ z &= 0, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα στην εξίσωση

$$F(x, y) = x^2 + y^2 = 4.$$

Προφανώς το σημείο κινείται επί κυκλικής τροχιάς ακτίνας 4 με ταχύτητα

$$\mathbf{v}(t) = (-8\sin 2t, 8\cos 2t, 0)\,,$$

μέτρου

$$v = \sqrt{(-8\sin 2t) + (8\cos 2t)} = 8.$$

Η συνάρτηση που "μετρά" το μήκος τόξου (δηλαδή το μήκος της τροχιάς) από το αρχικό σημείο που αντιστοιχεί στο χρόνο $t = 0$, δηλαδή το σημείο $(4, 0, 0)$ θα πληροί την εξίσωση

$$\frac{ds}{dt} = v = 8$$

και την αρχική συνθήκη

$$s(o) = 0.$$

Επομένως το μήκος τόξου θα είναι

$$s = 8t, \quad t \in [0, \pi]$$

και η κίνηση ως προς τη νέα παράμετρο s θα γράφεται:

$$\mathbf{r}(s) = \Big(4\cos\frac{s}{4}, 4\sin\frac{s}{4}, 0\Big)\,, \quad s \in [0, \pi/8].$$

Εύκολα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι το διάνυσμα

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \Big(-\sin\frac{s}{4}, \cos\frac{s}{4}, 0\Big)$$

είναι μοναδιαίου μέτρου.

Από την άλλη πλευρά, είτε από την εξ. (1.27) είτε από την εξ. (2.25) μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα προς την τροχιά έχει τη μορφή

$$\mathbf{n} = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$$

ή ισοδύναμα ως προς την παράμετρο s

$$\mathbf{n} = (\cos\frac{s}{4}, \sin\frac{s}{4}, 0).$$

Επειδή το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό σε κάθε σημείο της τροχιάς, η επιτάχυνση στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων (βλέπε εξ. (2.30)) θα γίνεται:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{v^2}{R}\mathbf{n} = \frac{8^2}{4}\mathbf{n} = 16\mathbf{n}.$$

Μ' άλλα λόγια στη κυκλική κίνηση, η επιτάχυνση στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων έχει μόνο μια συνιστώσα κατά το $\mathbf{n}$, δηλαδή "επιβιώνει" μόνο η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης.