Κεφάλαιο 3

Οι Νόμοι κίνησης του Newton

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τις σχέσεις μεταξύ των δυνάμεων και του αποτελέσματος που αυτές προκαλούν, δηλαδή την κίνηση. Οι σχέσεις αυτές που αποτελούν θεμελιώδεις νόμους της Μηχανικής (αλλά και της Φυσικής γενικώτερα) διατυπώθηκαν για πρώτη φορά από τον Isaac Newton, to 1687 στο πιο διάσημο ίσως βιβλίο της επιστημονικής βιβλιογραφίας, το "Philosophia Naturalis Principia Mathematica" ή χάριν συντομίας αναφερόμενο και ως "Principia". Όπως μαρτυρά και ο τίτλος του βιβλίου ο Newton διατύπωσε βασικές αρχές (principia mathematica) οι οποίες δεν μπορούν να αποδειχθούν και υιοθετούνται ως *μαθηματικά αξιώματα*. Προφανώς όμως αυτές οι αρχές πρέπει αφενός να συμφωνούν με την εμπειρία μας (δηλαδή να επιβεβαιώνονται από το πείραμα) και αφετέρου να ερμηνεύουν πιο περίπλοκες κινήσεις όπως για παράδειγμα τις τροχιές των πλανητών στο ηλιακό μας σύστημα.

3.1 Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα

Η **δύναμη** είναι μια έννοια που εισήχθηκε για πρώτη φορά από τον Newton και για την οποία όλοι έχουμε μια εμπειρική αίσθηση. Διαισθανόμαστε δηλαδή ότι η δύναμη είναι αυτή που "κρύβεται" πίσω από οποιαδήποτε αλλαγή στην κινητική κατάσταση ενός σώματος. Μ' άλλα λόγια η δύναμη και η κίνηση "πάνε παρέα" σε μια σχέση που η πρώτη αποτελεί το αίτιο και η δεύτερη το αποτέλεσμα. Σήμερα, 300 χρόνια μετά την εισαγωγή της έννοιας όλοι οι άνθρωποι είναι εξοικειωμένοι με την έννοια αυτή και την αποδέχονται χωρίς δυσκολία. Δεν συνέβη όμως το ίδιο με τους σύγχρονους προς τον Newton επιστήμονες, οι οποίοι του άσκησαν δριμύτατη κριτική για το "μυστικιστικό" χαρακτήρα της έννοιας της δύναμης.

Σε κάθε περίπτωση ο Newton εισήγαγε την έννοια αξιωματικά και συνεπώς την θεωρούσε μεταξύ των θεμελιακων εννοιών επι των οποίων έστησε το "οικοδόμημα" των principia. Η μονάδα της δύναμης στο SI είναι το Newton (N) ενώ στο cgs είναι η *δύνη* (dyn).

Ο λεγόμενος *πρώτος νόμος του Νεύτωνα ή νόμος της αδράνειας* διατυπωνεται ως εξής:

Κάθε υλικό σημείο παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας ή ευθύγραμμης ομοιόμορφης (ισοταχούς) κίνησης εκτός αν επιδρά επ' αυτού εξωτερική δύναμη.

Ουσιαστικά η παραπάνω διατύπωση μας "πληροφορεί" ότι, αντίθετα με ότι πίστευαν στην κλασσική αρχαιότητα, όταν σ' ένα σώμα δεν επιδρά καμμία δύναμη το σώμα διατηρεί την κινητική του κατάσταση. Δηλαδή αν ένα σώμα έχει μια μη-μηδενική ταχύτητα θα εξακολουθήσει να κινείται στο διηνεκές με την ίδια ταχύτητα όσο δεν επιδρά επάνω του καμμιά δύναμη. Φυσικά αν το σώμα είναι στην κατάσταση της ηρεμίας θα εξακολουθήσει να παραμένει ακίνητο. Οι Έλληνες φιλόσοφοι πίστευαν ότι η ηρεμία είναι η "φυσική κατάσταση" των σωματών και ότι για να κινηθούν ήταν απαραίτητος ένας εξωτερικός παράγοντας ο οποίος θα τα θέσει σε κίνηση. Πρώτος ο Γαλιλαίος αντιλήφθηκε ότι τα σώματα στη γη σταματούν να κινούνται, τουλάχιστον ως προς την επιφάνεια της γης, εξαιτίας της παρουσίας των τριβών.

3.2 Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

Μια άλλη θεμελιώδης έννοια που πρέπει να εισαχθεί σ' αυτή την παράγραφο είναι η *μάζα*. Η **μάζα** είναι μια εγγενής ιδιότητα ενός σώματος και περιγράφεται από μια βαθμωτή ποσότητα που μετρά το "ποσό της ύλης" που περιέχεται στο σώμα. Ή μονάδα μάζας στο cgs είναι το *γραμμάριο* (g) ενώ στο SI είναι το *χιλιόγραμμο* (kg). Επίσης η **ορμή** είναι μια διανυσματική ποσότητα που ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \tag{3.1}$$

όπου με m συμβολίζεται η μάζα του σώματος και με $\mathbf{v}$ η ταχύτητα του.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ποσοτικοποιεί τη σχέση ανάμεσα στη δύναμη που ασκείται επί ενός σώματος και το αποτέλεσμα της που είναι η μεταβολή της ορμής του σώματος. Πιο συγκεκριμένα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με τη δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα και προκαλεί αυτή τη μεταβολή

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \tag{3.2}$$

όπου με $\mathbf{F}$ συμβολίζεται η δύναμη. Αν η μάζα του σώματος είναι σταθερή και δεν μεταβάlλεται με το χρόνο η εξίσωση (3.2) γράφεται

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\boldsymbol{\alpha}. \tag{3.3}$$

Από την εξ. (3.3) εύκολα προκύπετι ότι η μονάδα δύναμης στο SI, δηλαδή το Newton γράφεται

$$1\mathrm{N} = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{3.4}$$

Μ' άλλα λόγια αν ασκηθεί δύναμη ενός N επί σώματος μάζας 1 Kg θα προκαλέσει επιτάχυνση 1 $\mathrm{m/s^2}$.

3.2.1 Η σημασία του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα

Αναμφισβήτητα η εξ. (3.3) αποτελεί την πιο σημαντική εξίσωση της Μηχανικής και ίσως όλων των θετικών επιστημών. Γι' αυτό αποκαλείται και *θεμελιώδης εξίσωση της δυναμικής*. Η εξίσωση αυτή διέπει την κίνηση όλων των σωμάτων από το πιο μικρό ως το πιο μεγάλο. Ας την δούμε όμως καλύτερα. Προφανώς η (3.3) είναι μια διανυσματική εξίσωση, άρα στην ουσία πρόκειται για τρεις βαθμωτές εξισώσεις

$$\begin{aligned} F_1 &= m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}, \\ F_2 &= m\ddot{y} = m\frac{d^2y}{dt^2}, \\ F_3 &= m\ddot{z} = m\frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

όπου $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ και $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Αν η επιβαλλόμενη δύναμη $\mathbf{F}$ είναι γνωστή, τότε οι εξ. (3.5) μπορούν να ολοκληρωθούν με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι κατάλληλες αρχικές συνθήκες για τη θέση και την ταχύτητα.

Παράδειγμα Επί υλικού σημείου μάζας 0.01 kg, που στη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $(2, 2, -1)$(σε cm) και κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$ cm/s επιδρά η δύναμη

$$\mathbf{F} = 10t\mathbf{e}_1 + 30t^2\mathbf{e}_2 + (40t^3 + 10)\mathbf{e}_3.$$

Να βρεθεί η θέση του υλικού σημείου για οποιαδήποτε χρονική στιγμή και το μέτρο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t = 2$ s.

Οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση του υλικού σημείου είναι

$$
\begin{aligned}
10\frac{d^2x}{dt^2} &= 10t,\\
10\frac{d^2y}{dt^2} &= 30t^2,\\
10\frac{d^2z}{dt^2} &= 40t^3+10,
\end{aligned}
$$

όπου η μάζα του υλικού σημείου υποογίστηκε σε γραμμάρια (m=0.01 kg=10 g), επιλέξαμε δηλαδή να εργαστούμε στο cgs. Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος έχουν ως εξής:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 2, \quad \dot{x}(0)=2,\\
y(0) &= 2, \quad \dot{y}(0)=4,\\
z(0) &= -1, \quad \dot{z}(0)=3.
\end{aligned}
$$

Ας ξεκινήσουμε από την πρώτη εξίσωση που γράφεται

$$\frac{d^2x}{dt^2}=t.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί πολύ εύκολα να επιλυθεί με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t^2}{2}+c_1 \Rightarrow x(t)=\frac{t^3}{6}+c_1t+c_2.$$

Στην τελευταία εφαρμόζουμε τις δύο πρώτες αρχικές συνθήκες:

$$x(0)=2\Rightarrow c_2=2 \quad \text{και} \quad \dot{x}(0)=2\Rightarrow c_1=2.$$

Επομένως η πρώτη συνιστώσα της κίνησης παίρνει την τελική μορφή

$$x(t)=\frac{t^3}{6}+2t+2.$$

Ομοίως, μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι οι άλλες δυο συνιστώσες γίνονται

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{t^4}{4}+4t+2\\
z(t) &= \frac{t^5}{5}+\frac{t^2}{2}+3t-1.
\end{aligned}
$$

Η αντίστοιχη ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{v}(t)=\left(\frac{t^2}{2}+2, t^3+4, t^4+t+3\right),$$

η οποία στο δεύτερο δευτερόλεπτο παίρνει την τιμή

$$\mathbf{v}(2) = (4, 12, 21)$$

με μέτρο

$$v(2) = \sqrt{4^2 + 12^2 + 21^2} = \sqrt{601} = 24.5 \text{ cm/s}.$$

Αντίστοιχοι υπολογισμοί οδήγησαν κατά το 17ο και το 18ο αιώνα στον ακριβή προσδιορισμό των τροχιών των σωμάτων του ηλιακού μας συστήματος, αφού η δύναμη που ασκείται μεταξύ των ουράνιων σωμάτων καθορίστηκε από την άλλη μεγάλη ανακάλυψη του Νεύτωνα, το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Αυτοί, οι πρωτοφανείς για την εποχή εκείνη, υπολογισμοί επηρρέασαν συνολικά την ανθρώπινη σκέψη αφού επικράτησε μια γενικευμένη αισιοδοξία ότι αν μας δωθούν κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες είναι δυνατόν να καθορίσουμε πλήρως την μελοντική συμπεριφορά οποιουδήποτε συστήματος ακόμα και ολόκληρου του σύμπαντος και οδήγησαν σε φιλοσοφικές απόψεις που βασιζόνταν στον λεγόμενο ντετερμινισμό (determine=καθορίζω).

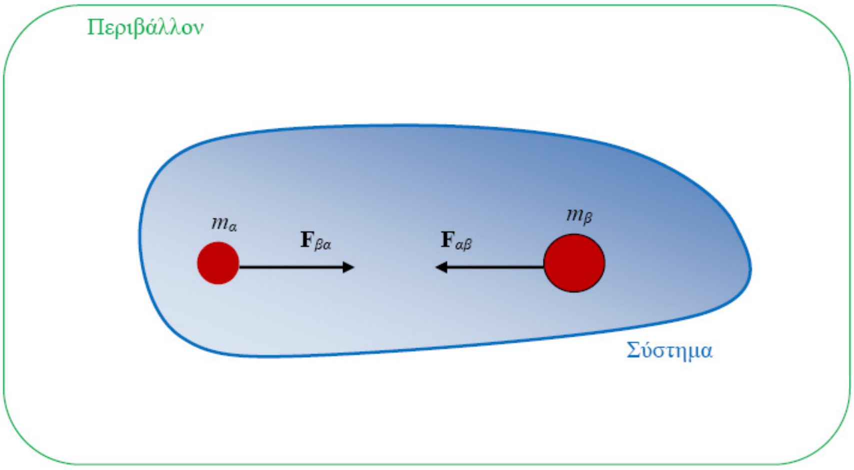
3.3 Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα

Στους δύο πρώτους νόμους είχαμε ένα υλικό σημείο (ή ένα υλικό σώμα) επί του οποίου ασκούσαμε μια **εξωτερική δύναμη**. Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα που αποκαλείται *νόμος δράσης - αντίδρασης* αναφέρεται σε δύο σώματα που αλληλεπιδρούν. Ας αγνοήσουμε, προς στιγμή, όλα τα άλλα υλικά σώματα του σύμπαντος και ας δούμε τα δυο σώματα ως ενιαίο σύστημα, τότε οι μεταξύ τους ασκούμενες δυνάμεις είναι **δυνάμεις αλληλεπίδρασης**. Επίσης, επειδή ασκούνται στο εσωτερικό του συστήματος αναφέρονται και ως **εσωτερικές δυνάμεις** (Σχήμα 3.1). ΄Ολες οι υπόλοιπες δυνάμεις που θα προέρχονται από τα υπόλοιπα σώματα, δηλαδή από το περιβάλλον, θα είναι εξωτερικές δυνάμεις.

Νόμος δράσης – αντίδρασης *Έστω δύο υλικά σημεία α και β, μάζας* m_α *και* m_β *αντιστοίχως και έστω* $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ *μια δύναμη που ασκεί το α επί του β, τότε και το β θα ασκεί επί του α τη δύναμη* $\mathbf{F}_{\beta\alpha}$ *για την οποία μάλιστα θα ισχύει:*

$$\mathbf{F}_{\beta\alpha} = -\mathbf{F}_{\alpha\beta}. \tag{3.6}$$

Πολύ συχνά η σχέση (3.5) ”προσλαμβάνεται” ως εξίσωση που περιγράφει ισορροπία, πράγμα που δεν είναι σώστο. Δεδομένου ότι στην ισορροπία απαιτούμε να μηδενίζεται η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται *σε ένα σωμάτιο*. Εν προκειμένω, οι δύο δυνάμεις της σχέσης (3.5) ασκούνται σε *διαφορετικά σωμάτια*.



Σχήμα 3.1. *Το σύστημα των δύο σημείων και το περιβάλλον.*

3.3.1 Αρχή διατήρησης της ορμής

Ας θεωρήσουμε τώρα τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το σωμάτιο α (εξ. (3.3)).:

$$\mathbf{F}_{\beta\alpha} = m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha, \tag{3.7}$$

όπου $\mathbf{r}_\alpha$ είναι το διάνυσμα θέσης του σωμάτιου α. Επίσης ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το σωμάτιο β θα γράφεται

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = m_\beta \ddot{\mathbf{r}}_\beta. \tag{3.8}$$

Με τη βοήθεια της εξ. (3.5), από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$\begin{aligned} m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = -m_\beta \ddot{\mathbf{r}}_\beta \quad \Rightarrow \quad & \frac{d}{dt}(m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha + m_\beta \dot{\mathbf{r}}_\beta) = 0 \Rightarrow \\ & \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta) = 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

όπου με $\mathbf{p}_\alpha$ και $\mathbf{p}_\beta$ σημειώνονται οι ορμές των υλικών σημείων α και β, αντίστοιχα. Η εξ. (3.8) σημαίνει ότι για την ολική ορμή του συστήματος $\mathbf{p}_{\text{ολ}} = \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta$ ισχύει

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{ολ}}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{p}_{\text{ολ}} = \text{σταθερή}. \tag{3.10}$$

Η εξ. (3.9) σημαίνει ότι *η ολική ορμή ενός κλειστού συστήματος παραμένει σταθερή αν δεν ασκείται επ' αυτού καμιά εξωτερική δύναμη.* Ουσιαστικά πρόκειται για την **αρχή διατήρησης της ορμής**.

3.4 Τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Ας επιστρέψουμε για λίγο στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και την εξίσωση (3.2). Αν υποθέσουμε ότι καμμιά εξωτερική δύναμη δεν δρά επί του σώματος το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{v}_0$, τότε η εξ. (3.2) γίνεται

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0 \Rightarrow m\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{c}, \tag{3.11}$$

όπου $\mathbf{c}$ ένα σταθερό διάνυσμα. Επειδή όμως το σώμα είχε ήδη μια σταθερή ταχύτητα συμπεραίνουμε ότι το σταθερό διάνυσμα είναι $\mathbf{c} = \mathbf{v}_0$, δηλαδή το σώμα θα εξακολουθήσει να κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}_0$. Μ' άλλα λόγια *αν σ' ένα σώμα δεν δρα καμμιά δύναμη τότε το σώμα θα εξακολουθεί να κινείται με σταθερή ταχύτητα*. Όμως, αυτό ακριβώς είναι το περιεχόμενο του πρώτου νόμου του Νεύτωνα. Φαίνεται λοιπόν, από μια πρώτη άποψη, ότι ο πρώτος νόμος αποτελεί ένα απλό πόρισμα του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και μ'αυτή την έννοια δεν είναι απαραίτητος ως ανεξάρτητος νόμος. Αυτό όμως δεν είναι σωστό!

Η ουσία του πρώτου νόμου του Νεύτωνα είναι η αναφορά στην *κατάσταση ηρεμίας* και στην *ομοιόμορφη κίνηση*. Πότε όμως ένα υλικό σημείο είναι στην κατάσταση ηρεμίας; Πότε είναι ακίνητο με μηδενική ταχύτητα και πότε κινείται με ομοιόμορφη (σταθερή) ταχύτητα; Σε κάθε περίπτωση χρειαζόμαστε ένα καρτεσιάνο σύστημα συντεταγμένων για να μετρούμε στο χώρο και ένα ρολόι για να μετρούμε στο χρόνο, δηλαδή χρειαζόμαστε ένα **σύστημα αναφοράς**. Μάλιστα χρειαζόμαστε ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς το οποίο θα το αποκαλούμε **αδρανειακό** ως προς το οποίο μπορούμε να αποφανθούμε αν το σώμα μας είναι ακίνητο ή αν κινείται με σταθερή ταχύτητα. Που μπορούμε όμως να αναζητήσουμε ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς; Σϊγουρα όχι πάνω στη γη που κινείται σε ελλεπτική τροχιά γύρω από τον ήλιο και ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της! Που αλλού όμως όταν είναι γνωστό ότι όλα ανεξαιρέτως τα ουράνια σώματα κινούνται καθώς επίσης ότι και το ίδιο το σύμπαν διαστέλλεται; Η απάντηση είναι "πουθενά", επομένως η ύπαρξη ενός ακίνητου συστήματος αναφοράς πρέπει να εισαχθεί ως αξίωμα. Αυτό ακριβώς κάνει εμμέσως ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα, υποθέτει ότι **υπάρχει τουλάχιστον ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς**.

3.4.1 Η σχετική κίνηση και οι μετασχηματισμοι Γαλιλαίου

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το οποίο στο Σχήμα 3.2 σημειώνεται ως $OX_1X_2X_3$. Έστω τώρα ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς, το $O'X_1'X_2'X_3'$ το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{w}$ ως προς το αδρανειακό σύστημα. Θεωρούμε ότι τα δυο συστήματα διαθέτουν συγχρονισμένα ρολόγια, δηλαδή "βλέπουν" την ίδια ώρα και μετρούν τα χρονικά διαστήματα κατά τον ίδιο τρόπο. Επίσης, θεωρούμε ότι το κινούμενο σύστημα κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ συνέπιπτε με το αδρανειακό. Δηλαδή το $O'X_1'X_2'X_3'$ ξεκινά από το σημείο O και απλώς μετατίθεται στον χώρο ισοταχώς χωρίς να περιστρέφεται.

Ας συμβολίσουμε με $\mathbf{R}(t)$ το διάνυσμα που δείχνει τη θέση του νέου συστήματος, δηλαδή το διάνυσμα θέσης του σημείου O', τότε θα ισχύει:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{w}, \quad \text{με} \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{0}. \tag{3.12}$$

Το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.11) γράφεται ισοδύναμα

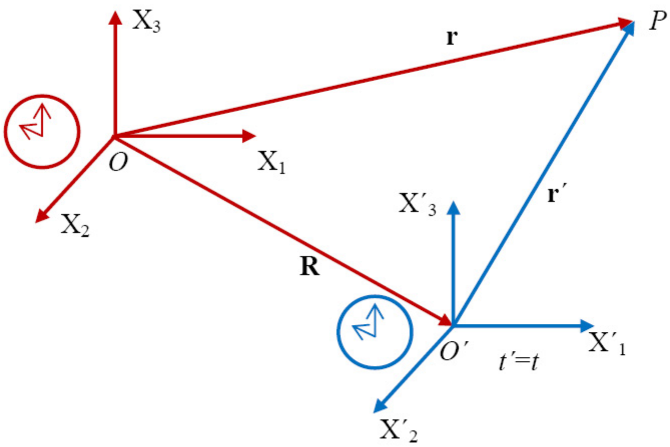
$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dt} &= w_1, \quad R_1(0) = 0, \\ \frac{dR_2}{dt} &= w_2, \quad R_2(0) = 0, \\ \frac{dR_3}{dt} &= w_3, \quad R_3(0) = 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

από το οποίο εύκολα προκύπτει η λύση:

$$R_1(t) = w_1 t, \quad R_2(t) = w_2 t, \quad R_3(t) = w_3 t \tag{3.14}$$

ή, ισοδύναμα

$$\mathbf{R} = \mathbf{w}t. \tag{3.15}$$



Σχήμα 3.2. *Το διάνυσμα θέσης του σημείου P ως προς ένα ακίνητο και ένα κινούμενο σύστημα αναφοράς.*

Έστω τώρα ένα κινούμενο υλικό σημείο P το οποίο, στο χρόνο t, έχει διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ως προς το αρχικό (αδρανειακό) σύστημα και $\mathbf{r}' = (x_1', x_2', x_3')$ ως προς το κινούμενο σύστημα (βλέπε Σχ. 3.2). Ετσι μπορούμε να γράψουμε τη σχέση μεταξύ τους:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' = \mathbf{w}t + \mathbf{r}' \quad \text{και} \quad t = t' \tag{3.16}$$

ή, ισοδύναμα

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 t + x_1', \\ x_2 &= w_2 t + x_2', \\ x_3 &= w_3 t + x_3' \end{aligned} \tag{3.17}$$

και

$$t = t'. \tag{3.18}$$

Οι μετασχηματισμοί μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς που περιγράφονται από τις εξ. (3.17) και (3.18) λέγονται **μετασχηματισμοί Γαλιλαίου**.

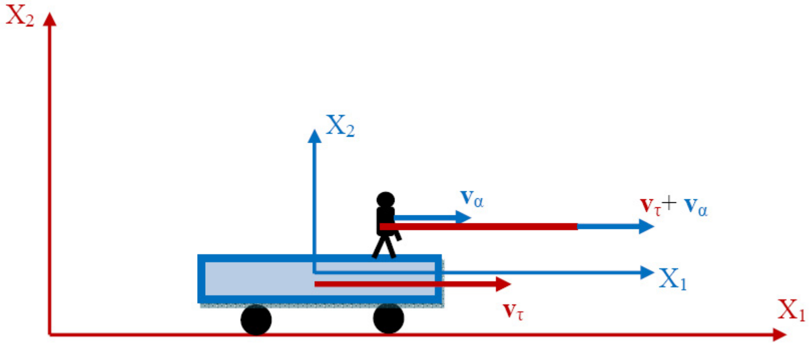
Μορούμε τώρα να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σημείου P ως προς τα δύο συστήματα, παραγωγίζοντας τις σχέσεις (3.16)

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1 + v_1', \\ v_2 &= w_2 + v_2', \\ v_3 &= w_3 + v_3' \end{aligned} \tag{3.19}$$

ή, ισοδύναμα

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}', \tag{3.20}$$

όπου $v_i = \dot{x}_i$ και $v_i' = \dot{x'}_i$. Δηλαδή, η ταχύτητα του P ως προς το ακίνητο σύστημα είναι ίση με τη ταχύτητα του P ως προς το κινούμενο συν την ταχύτητα του κινούμενου συστήματος ως προς το ακίνητο.



Σχήμα 3.3. *Το σύστημα των δύο σημείων και το περιβάλλον.*

Το συμπέρασμα αυτό ταιριάζει απολύτως με τη διαίσθηση μας όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3 όπου απεικονίζεται ένα τραίνο που κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{v}_\tau$ ως προς ένα ακίνητο αδρανειακό σύστημα. Δηλαδή $\mathbf{v}_\tau$ είναι η ταχύτητα του τραίνου όπως την καταγράφει ένας παρατηρητής από το σύστημα αναφοράς OX_1X_2. Ένας επιβάτης περπατά με ταχύτητα $\mathbf{v}'_\alpha$ στην κατεύθυνση που κινείται το τραίνο, δηλαδή $\mathbf{v}'_\alpha$ είναι η ταχύτητα του επιβάτη όπως την καταγράφει ένας παρατηρητής από το σύστημα αναφοράς $O'X'_1X'_2$. Ο ακίνητος παρατηρητής (στο σύστημα αναφοράς OX_1X_2), σύμφωνα με την εξ. (3.19) θα καταγράψει την ταχύτητα του επιβάτη ως

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}'_\alpha. \tag{3.21}$$

Μ' άλλα λόγια ο "ακίνητος" παρατηρήτης θα πρέπει να αθροίσει διανυσματικά τις δύο ταχύτητες.

Ας επιστρέψουμε όμως στη σχετική κίνηση οτυ σχήματος 3.2 και ας εξέτασουμε τις επιταχύνσεις που καταγράφουν τα δυο συτήματα αναφοράς. Δεν έχουμε παρά να παραγωγίσουμε τις εξισώσεις (3.18) για να πάρουμε

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha'_1, \\ \alpha_2 &= \alpha'_2, \\ \alpha_3 &= \alpha'_3 \end{aligned} \tag{3.22}$$

ή, ισοδύναμα

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'. \tag{3.23}$$

Υπενθυμίζουμε ότι w_1, w_2 και w_3 είναι σταθερές και ότι $\alpha_i = \dot{v}_i$ και $\alpha'_i = \dot{v'}_i$. Οι σχέσεις (3.21) (και η (3.22)) μας πληροφορούν ότι τα δυο συστήματα αναφοράς *καταγράφουν την ίδια επιτάχυνση για το σημείο* P. Δηλαδή οι δυο παρατηρητές μολονότι μετρούν διαφορετικές ταχύτητες συμφωνούν απόλυτα στη μέτρηση της επιτάχυνσης. Όμως η επιτάχυνση είναι το μέγεθος που "μπαίνει" στη θεμελιώδη εξίσωση της κίνησης (εξ. (3.3)). Μ' άλλα λόγια οι δύο παρατηρητές, μολονότι ο ένας κινείται ως προς τον άλλο με σταθερή ταχύτητα, συμφωνούν σε ότι αφορά τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα επειδή καταγράφουν τις ίδιες επιταχύνσεις. Επομένως και το δέυτερο σύστημα, καθώς και οποιαδήποτε άλλο κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς αυτό, είναι επίσης αδρανειακό. Κοντολογής, η υπόθεση ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον αδρανειακό σύστημα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν άπειρα τέτοια συστήματ αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι *ο δεύτερος νόμος του Νέυτωνα είναι αναλλοιώτος σε μετασχηματισμούς μεταξύ αδρανειακών συστημάτων αναφοράς* ή ισοδύναμα η εξίσωση κίνησης (3.3) είναι αναλλοίωτη υπό τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

3.5 Η μεταβολή της στροφορμής

Εισάγουμε τώρα μια νέα έννοια που σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση των σωμάτων. Έστω ένα υλικό σημείο μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς $OX_1X_2X_3$. Ονομάζουμε **στροφορμή** του υλικού σημείου ως προς το O, το εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \tag{3.24}$$

Όπως η ορμή συνδέεται με τη δύναμη μέσω της εξίσωσης κίνησης, η στροφορμή σχετίζεται με την ροπή της δύναμης

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \tag{3.25}$$

όπου $\mathbf{F}$ είναι η δύναμη που ασκείται επί του υλικού σημείου. Πράγματι, αν παραγωγίσουμε την στροφορμή, δηλαδή την εξ. (3.23) παίρνουμε

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}. \tag{3.26}$$

Στην παραπάνω σχέση λάβαμε υπόψη ότι το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του είναι μηδεν, δηλαδή $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, καθώς και τη σχέση (3.2) (η θεμελιώδη εξίσωση της κίνησης) και τη σχέση (3.25). Συνοψίζοντας μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση που διέπει την μεταβολή της στροφορμής.

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}\right) = \mathbf{M}. \tag{3.27}$$

Μ' άλλα λόγια, η ροπή προκαλεί μεταβολή της στροφορμής (όπως η δύναμη προλαλεί μεταβολή της ορμής) και μάλιστα ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με την ροπή που προκάλεσε αυτή τη μεταβολή. Αξίζει να επισημάνουμε την αναλογία μεταξύ της ροπής και της δύναμης από την μια και της ορμής και της στροφορμής από την άλλη όπως εισέρχονται στους νόμους μεταβολή της ορμής (εξ. (3.2)) και στροφορμής (εξ. (3.27)).