Κεφάλαιο 4

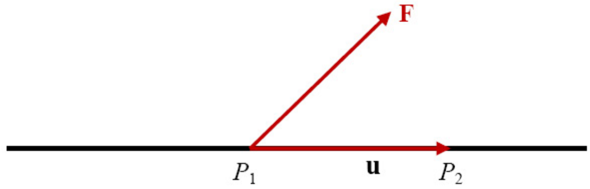
Η αρχή διατήρησης της ενέργειας

4.1 Το έργο

Έστω μια σταθερή δύναμη $\mathbf{F}$ δρά επί ενός σωμάτιου που κινείται ευθύγραμμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Το **έργο** που παράγει (ή καταναλώνει) η δύναμη κατά το χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή t_1 όταν το σημείο βρίσκεται στη θέση P_1 έως την χρονική στιγμή t_2 όταν το σημείο θα βρεθεί στη θέση P_2, δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \tag{4.1}$$

όπου $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$. Το έργο είναι μια βαθμωτή ποσότητα που "μετρά" την ενέργεια που η εξωτερική η δύναμη $\mathbf{F}$ προσδίδει ή αφαιρεί από το υλικό σημείο (ή από ένα σύστημα) και προφανώς έχει διαστάσεις ενέργειας. Στο SI η μονάδα του έργου είναι το joule (1 joule $=$ 1 N$\cdot$m), ενώ στο cgs η αντίστοιχη μονάδα έργου είναι το "έργιο" (1 erg $=$ 1 dyn$\cdot$cm). Στην



Σχήμα 4.1. *Το σωμάτιο κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά και η δύναμη* $\mathbf{F}$ *επ' αυτού είναι σταθερή κατά μέτρο και διεύθυνση.*

πιο γενική περίπτωση που εξετάζουμε εδώ ούτε η δύναμη είναι σταθερή με τη θέση ούτε οι τροχιές, εν γένει, είναι ευθύγραμμες ώστε οι μετατοπίσεις να περιγράφοναι με διανύσματα. Ας θεωρήσουμε μια καμπυλόγραμμη τροχιά και μια δύναμη $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ που μεταβάλλεται με τη θέση και δρα επί ενός σωματίου όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t βρισκόμαστε στο σημείο P. Σε μια απειροστή χρονική μεταβολή dt αντιστοιχεί μια απειροστή μεταβολή της θέσης

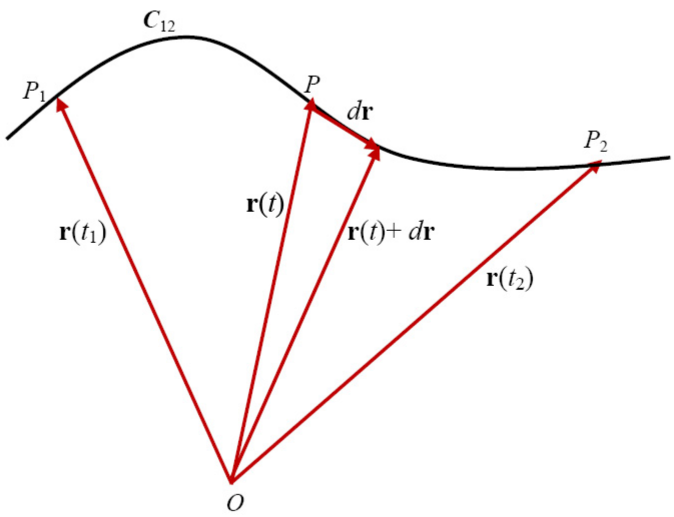
$$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}dt. \tag{4.2}$$

Αν θεωρήσουμε ότι η δύναμη παραμένει σταθερή κατά την απειροστή μεταβολή $d\mathbf{r}$, το αντίστοιχο παραγόμενο έργο σύμφωνα με τη σχέση (4.1) θα δίνεται από τη σχέση

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}dt. \tag{4.3}$$

Ετσι το έργο που παράγεται κατά τη κίνηση του σωματίου στο τμήμα της καμπύλης C_{12} από το σημείο P_1 που έχει διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ έως το σημείο P_2 με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ θα δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκήρωμα

$$W_{12} = \int_{C_{12}} dW = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}dt. \tag{4.4}$$



Σχήμα 4.2. *Το έργο που παράγει μια μη-σταθερή δύναμη επί ενός σωματίου που κινείται σε καμπυλόγραμμη τροχιά.*

Το τελευταίο (τρίτο στη σειρά) ολοκλήρωμα της (4.4) έχει ως μεταβλητή ολοκλήρωσης τον χρόνο t ο οποίος παίρνει τιμές στο διάστημα $[t_1, t_2]$, μ' άλλα λόγια πρόκειται για ένα ορισμένο ολοκλήρωμα που μπορεί να υπολογιστεί αρκεί να γνωρίζουμε την τροχιά $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ και να μας δίνεται η έκφραση της δύναμης ως προς το $\mathbf{r}$.

Παράδειγμα Υλικό σημείο κινείται επί κυκλικής τροχιάς ακτίνας ακτίνας 2 cm, το κέντρο της οποίας βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Το σωμάτιο διατηρεί σταθερή γωνιακή ταχύτητα διαγράφοντας μισή κυκλική περιστροφή το δευτερόλεπτο. Αν επί του υλικού σημείου ασκείται η δύναμη $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{F} = (3x - 4y, 4x + 2y) \text{ dyn},$$

να υπολογίσετε το έργο που παράγει αυτή η δύναμη κατά τη διάρκεια μιας πλήρους περιστροφής.

Γνωρίζοντας ότι η τροχιά του σωματίου μας είναι κυκλική και η γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega = \pi$ rad/s, μπορούμε να την γράψουμε τροχιά της ως

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)), \quad t \in [t_1, t_2]$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\pi t), \\ y(t) &= \sin(\pi t)), \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Επομένως η τροχιά που αντιστοιχεί σε μια πλήρη περιστροφή θα δίνεται από τη καμπύλη $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\pi t), \\ y(t) &= \sin(\pi t)), \quad t \in [0, 2]. \end{aligned}$$

Το έργο της δύναμης $\mathbf{F}$ επί της κλειστής καμπύλης $\mathcal{C}$ θα δίnεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμσ υπολογίζεται εύκολα με μια στάνταρ ακολουθία ενεργειών. Μετασχηματίζουμε όλες τις ποσότητες που βρίσκονται στην υπό ολοκληρωση ποσότητα σε συναρτήσεις του χρόνου t ώστε να καταλήξούμε σε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα το οποίο θα αντιμετωπίσουμε με τις γνωστές μεθόδους και τεχνικές ολοκλήρωσης. Ξεκινούμε πρώτα από τη δύναμη $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = (3x - 4y, 4x + 2y) = (3\cos(\pi t) - 4\sin(\pi t), 4\cos(\pi t) + 2\sin(\pi t)).$$

Κατόπιν υπολογίζουμε το διαφορικό $d\mathbf{r}$

$$d\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}} dt = (-\pi \sin(\pi t), \pi \cos(\pi t)) dt.$$

Έτσι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του έργου γίνεται

$$\begin{aligned}
W &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^2 \left[-\pi \sin(\pi t)(3\cos(\pi t) - 4\sin(\pi t)) + \pi \cos(\pi t)(4\cos(\pi t) + 2\sin(\pi t))\right] dt \\
&= \int_0^2 \left[-3\pi \sin(\pi t)\cos(\pi t) + 4\pi \sin^2(\pi t) + 4\pi \cos^2(\pi t) + 2\pi \sin(\pi t)\cos(\pi t)\right] dt \\
&= -\int_0^2 \sin(\pi t)\cos(\pi t) d(\pi t) \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^2 \sin(2\pi t) d(\pi t) = -\frac{1}{4}\int_0^2 \sin(2\pi t) d(2\pi t) \\
&= \frac{1}{4}\cos(2\pi t)|_0^2 = \frac{1}{4}\left[\cos(4\pi) - \cos 0\right] = 0.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα Υπολογισμός του έργου από το 0 έως το t.

4.2 Η ισχύς

Ας θεωρήσουμε ξανά ένα σωμάτιο που κινείται σ' ένα πεδίο δυνάμεων $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάσαμε πως το πεδίο δυνάμεων προσδίδει ή αφαιρεί ενέργεια από το σωμάτιο καθώς αυτό κινείται κατά μήκος μιας τροχιάς από τη θέση P_1 έως τη θέση P_2. Σ' αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε τον ρυθμό που το πεδίο δυνάμεων δίνει ή απορροφά ενέργεια από το σωμάτιο.

Ας επανέλθουμε στην τυχαία θέση P του Σχήματος 4.2. Καθώς το σωμάτιο μετατοπίζεται κατά $d\mathbf{r}$ στο απειροστό χρονικό διάστημα dt, το έργο που προσδίδεται ή καταναλώνεται είναι dW. Ο ρυθμός που προσδίδεται ή καταναλωνεται αυτό το έργο λέγεται **Ισχύς**

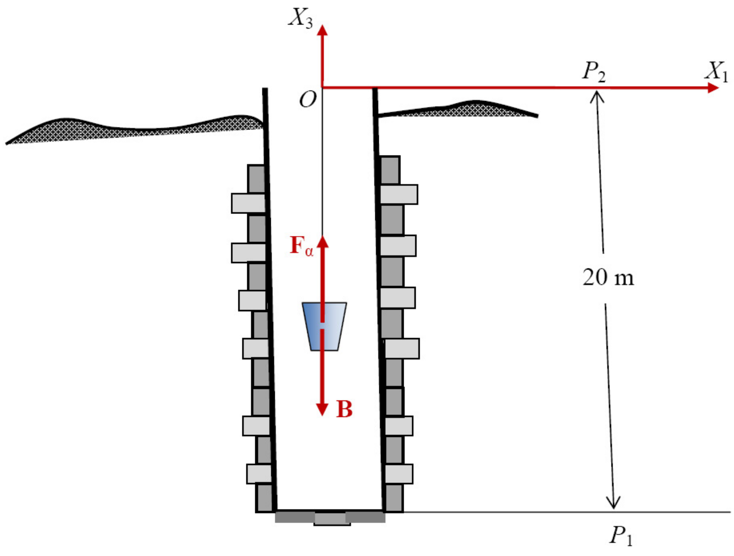
$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}. \tag{4.5}$$

Αν λάβουμε υπόψη την σχέση (4.3) η ισχύς γράφεται επίσης

$$\mathcal{P} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{4.6}$$

Η ισχύς έχει διαστάσεις ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και στο SI η μονάδα ισχύος είναι το watt (1 W = joule/s) ενώ στο cgs, η μονάδα ισχύος είναι το erg/s.

Παράδειγμα Από ένα πηγάδι (Σχήμα 4.3) βάθους h=20 m ανελκύεται με την βοήθεια ανθρώπινης δύναμης κουβάς που περιέχει νερό 15 kg με ταχύτητα 0.2 m/s. Αν αγνοηθούν οι απώλειες λόγω τριβών, να υπολογιστούν το έργο που απαιτείται και η ισχύς της ανθρώπινης δύναμης.



Σχήμα 4.3.

Επειδή δεν υπάρχουν τριβές το έργο της ανθρώπινης δύναμης θα είναι κατ' απόλυτη τιμή ίσο με το έργο της δύναμης της βαρύτητας $\mathbf{B} = (0, -mg)$ η οποία είναι σταθερή (ανεξάρτητη της θέσης) και το έργο της θα δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$W = \mathbf{B} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = -\mathrm{mgh} = -15\ 9.81\ 20\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2 \cdot \mathrm{m} = -294.3\ \mathrm{joule}$$

όπου $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, h)$. Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η δύναμη της βαρύτητας "αντιστέκεται" στην κίνηση, δηλαδή καταναλώνει έργο. Αντίθετα, η ανθρώπινη δύναμη που έχει την αντίθετη διεύθυνση $\mathbf{F}_\alpha = (0, mg)$ θα παράγει έργο

$$W = \mathbf{F}_\alpha \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \mathrm{mgh} = 294.3\ \mathrm{joule}$$

Η ταχύτητα ανέλκυσης είναι $\mathbf{v} = (0, 0.2)$ m/s, επομένως η ισχύς που καταναλώνει η δύναμη της βαρύτητας θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{P} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = -\mathrm{mgv} = -15\ 9.81\ 0.2\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2 \cdot \mathrm{m/s} = -2.943\ \mathrm{w}$$

Επομένως για να ανέβει ο κουβάς με το νερό στην επιφάνεια η ανθρώπινη δύναμη θα πρέπει να παράσχει ενέργεια 294.3 joule με ρυθμό περίπου 2.9 joule/s.

4.3 Η ενέργεια

Στην παράγραφο αυτή θα συζητήσουμε τις ενεργειακές θεωρήσεις γι' αυτό ξεκινούμε με τον ορισμό της κινητικής ενέργειας ενός σώματος μάζας m:

$$T(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathrm{m}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \tag{4.7}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$ (σχέση (1.7)), η παραπάνω έκφραση γράφεται

$$T = \frac{1}{2}\mathrm{m}v^2. \tag{4.8}$$

Θα εξετάσουμε τώρα το ακόλουθο ερώτημα: Τι γίνεται το έργο που κερδίζει ένα σωμάτιο μάζας m από ένα πεδίο δυνάμεων $\mathbf{F}(\mathbf{r})$; Είναι γνωστό ότι η ενέργεια που προσφέρεται σ' ενα υλικό σημείο που κινείται από τη θέση P_1 (στη χρονική στιγμή t_1) στη θέση P_2 (στη χρονική στιγμή t_2) δίνεται από τη σχέση (4.4):

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt. \tag{4.9}$$

Η τελευταία, με την βοήθεια του θεμελιώδους νόμου της δυναμικής, γίνεται

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{m}\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathrm{m}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) dt = \left(\frac{1}{2}\mathrm{m}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right)_{t_1}^{t_2} = T(\mathbf{r}_2) - T(\mathbf{r}_1). \tag{4.10}$$

Η (4.10) μας "πληροφορεί" ότι η ενέργεια που προσδίδεται στο σωμάτιο κατά την μετάβασή του από το σημείο P_1 (με διάνυσμα θέσης το $\mathbf{r}_1$) στο σημείο P_2 (με διάνυσμα θέσης το $\mathbf{r}_2$) είναι η διαφορά της κινητικής ενέργειας στις δυο θέσεις. Μ' άλλα λόγια, *η ενέργεια που προσδίδεται στο σωμάτιο από την εξωτερική δύναμη χρησιμοποιείται αποκλειστικά για την αύξηση της κινητικής ενέργειας του σωματίου.* Ή, αλλιώς μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

"το έργο που παρέσχε η εξωτερική δύναμη μετατράπηκε πλήρως σε κινητική ενέργεια".

Η παρπάπανω διατύπωση συμφωνεί με την λεγόμενη **αρχή διατήρησης της ενέργειας** αφού μας "βεβαιώνει" ότι το έργο της εξωτερικής δύναμης δεν χάνεται, αλλά απλώς μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του σωματίου. Προφανώς, η ιδέα της διατήρησης της ενέργειας, που αποτελεί μια από τις κεντρικές ιδέες της Μηχανικής, δεν ππεριορίζεται μόνο στα μηχανικά φαινόμενα. Γενικεύεται σε κάθε είδους διαδικασία κινητική, δυναμική, θερμική, ηλεκτρική, χημική, πυρηνική κτλ. Ουσιαστικά μας διαβεβαιώνει ότι στο Σύμπαν η ενέργεια ούτε "γεννιέται" ούτε "καταστρεφέται", υπάρχει ένα σταθερό απόθεμα που διατηρείται σταθερό. Επομένως όλες οι ενεργειακές διαδικασίες που παρατηρούμε είναι απλές μετατροπές από τη μια μορφή ενέργειας στην άλλη χωρίς να παραβιάζεται η παραπάνω αρχή. Επίσης η ίδια αρχή ισχύει και σε ένα *κλειστό σύστημα*, δηλαδή σε ένα σύστημα που δεν ανταλλάσει ενέργεια με το περιβάλλον. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να ισχυριστουμε ότι

. *"η ενέργεια ενός κλειστού συστήματος παραμένει σταθερή".*

Σε ότι αφορά τη μηχανική ενέργεια η παραπάνω διατύπωση παίρνει μια πολύ κομψή μορφή στην περίπτωση που η εξωτερική δύναμη είναι συντηρητική όπως δείχνουμε στην επόμενη παράγραφο.

4.4 Συντηρητικές δυνάμεις

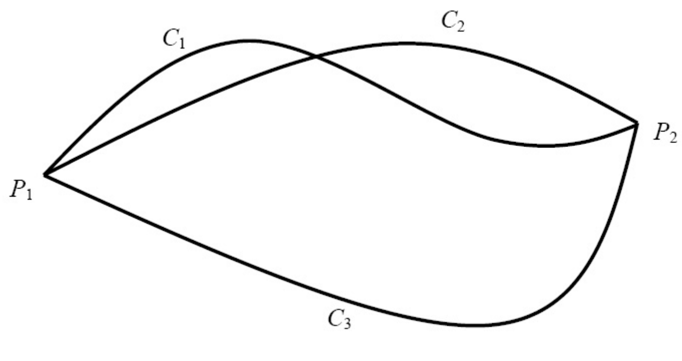
Θα λέμε ότι το πεδίο δυνάμεων $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ είναι συντηρητικό αν υπάρχει μαι βαθμωτή συνάρτηση σημαίνει $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ τέτοια ώστε:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{4.11}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ F_2 &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ F_3 &= -\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Η συνάρτηση $V = V(x, y, z)$ που εξαρτάται από τη θέση $\mathbf{r} = (x, y, z)$ λέγεται **συνάρτηση δυναμικού**.



Σχήμα 4.4. *Τρεις διαφορετικοί δρόμοι (C_1, C_2 και C_3) για την μετάβαση από το σημείο P_1 στο σημείο P_2.*

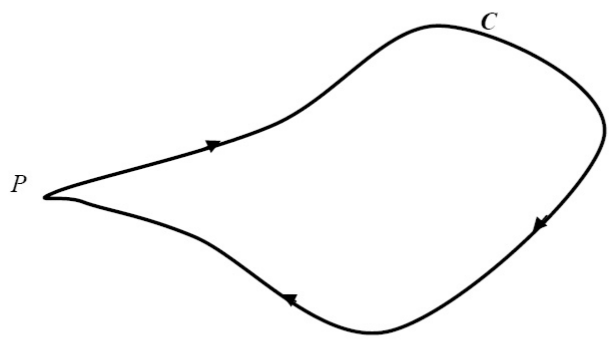
Μπορεί να αποδειχθεί ότι όταν ένα πεδίο είναι συντηρητικό, το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση ενός υλικού σημείου από μια θέση P_1 σε μια άλλη θέση P_2 *είναι ανεξάρτητο* *του δρόμου που επιλέχθηκε για να γίνει η μετάβαση.* Δηλαδή το έργο που παράγεται (ή καταναλώνεται) κατά μήκος των δρόμων C_1, C_2 και C_3 του σχήματος 4.4 είναι ακριβώς το ίδιο:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}. \tag{4.13}$$

Επίσης το έγο που παράγεται (καταναλώνεται) κατά τη μετάβαση από το σημείο P_1 στο σημείο P_2 είναι αντίθετο από το έργο που καταναλώνεται (παραγέται) κατά την αντίθετη φορά από το σημείο P_2 στο σημείο P_1:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = -\int_{-C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}. \tag{4.14}$$

Από την τελευταία σχέση συνάγεται ότι το έργο μιας συντηρητικής δύναμης κατα μήκος



Σχήμα 4.5. *Η κλειστή καμπύλη C ξεκινά και τελειώνει σημείο P με δεξιόστροφη φορά.*

μιας κλειστής καμούλης είναι μηδέν (Σχήμα 4.5)

$$\oint_{C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = 0. \tag{4.15}$$

Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα πεδίο δυνάμεων $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό αν και μόνο αν το $\mathbf{F}$ είναι αστρόβιλο, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \tag{4.16}$$

δηλαδή αν για κάθε σημείο (x, y, z) (όπου ορίζεται το πεδίο F) ισχύει

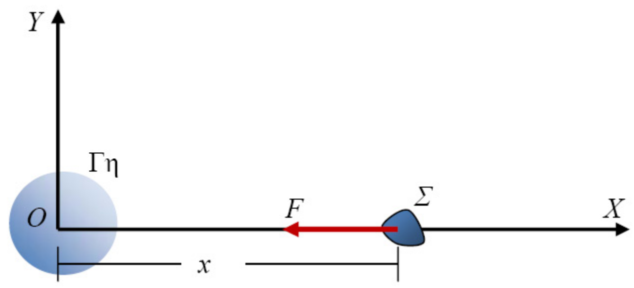
$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3 = 0. \tag{4.17}$$

Παράδειγμα 1 Ο Νεύτων, εκτός των άλλων, διατύπωσε τον λεγόμενο **νόμο της παγκόσμιας έλξης**, ο οποίος ερμήνευσε τις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των ουρανιών σωμάτων και τη κίνηση των πλανητών του ηλιακού συσστήματος. Ο νόμος αυτός προβλέπει μια ελκτική δύναμη μεταξύ δύο σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 της μορφής

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

όπου $G = 6.6742 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$ είναι η *σταθερά της παγκόσμιας έλξης*.
Ας εξετάσουμε τώρα ποιο είναι το δυναμικό του απορρέει από το παραπάνω πεδίο δυνάμεων ή αυτό που πιο απλά αποκαλούμε δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γής.

Γνωρίζοντας ότι η Γη έχει μάζα $M = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, θεωρούμε ένα σώμα Σ μάζας m σε μια αποσταση από αυτήν. Θέτουμε τον άξονα των X επί του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο σώματα και ας τοποθετήσουμε τη Γη στη θέση 0 έτσι ώστε η μεταξύ τους απόσταση να είναι x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.6. Τότε επί του Σ θα ασκείται η δύναμη



Σχήμα 4.6. *Το πεδίο βαρύτητας της Γης ασκεί ελκτική δύναμη επί του σώματος Σ.*

$$F(x) = -G\frac{Mm}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Το αρνητικό πρόσημο τέθηκε στην παραπάνω σχέση έτσι ώστε η ελκτική δύναμη που προκύπτει να είναι συμβατή με το σύστημα συντεταγμένων που εισαγάγαμε στο παραπάνω σχήμα. Επειδή η δύναμη εξαρτάται μόνο από το x, το δυναμικό που αναζητούμε θα είναι της μορφής $V = V(x)$ και η σχέση (4.11) θα πάρει την απλούστερη μορφή:

$$F = -\frac{dV}{dx}.$$

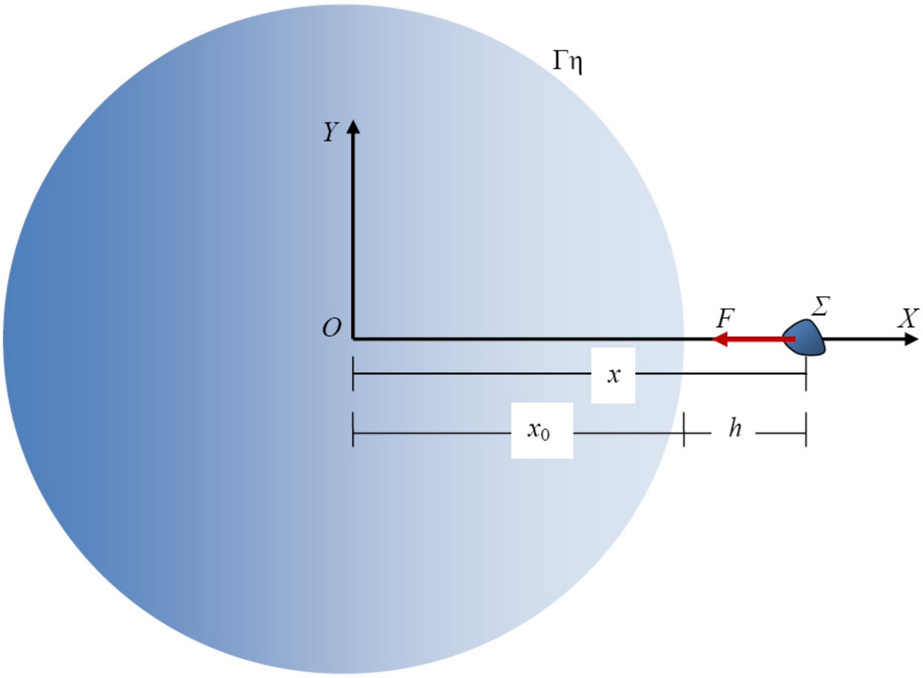
Κατά συνέπεια, το δυναμικό V θα υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$V(x) = -\int F(x)dx = \int \left(G\frac{Mm}{x^2}\right) dx = GM\int \frac{m}{x^2}dx \Rightarrow$$

$$V(x) = -(GM)\frac{m}{x} + C,$$

όπου C μια αυθαίρετη σταθερά η οποία δεν μπορεί να προσδιοριστεί περαιτέρω. Άλλωστε είναι αδιάφορο ποια τιμή θα πάρει, με την έννοια ότι η σχέση (4.11) θα ισχύει ανεξάρτητα από την επιλογή της C. Έτσι το δυναμικό θα υπολογίζεται πάντοτε ως προς μια αυθαίρετη σταθερά.

Παράδειγμα 2 Θα εξετάσουμε τώρα το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας για ένα αντικείμενο που βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της Γης. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4.7, σημειώνουμε με x_0 την ακτίνα της Γης (μια μέση τιμή της είναι περίπου $6.37 \cdot 10^3$ km) και με h την απόσταση του Σ από την επιφάνεια της Γης. Επειδή $h \ll x_0$, η συνάρτηση του



Σχήμα 4.7. *Το πεδίο βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης.*

δυναμικού μπορεί να αναπτυχθεί σε σερά Taylor γύρω από το σημείο x_0:

$$V(x) = V(x_0 + h) = V(x_0) + V'(x_0)h + \frac{1}{2}V''(x_0)h^2 + \cdots .$$

Όπως κάνουμε συνήθως με τα αναπτύγματα Taylor μολονότι αυτά έχουν άπειρους όρους, εμείς κρατούμε λίγους μόνο από αυτούς, ανάλογα με την ακρίβεια της προσέγγισης που επιθυμούμε. Πολύ συχνά οι δύο πρώτοι όροι είναι αρκετοί για μια ΐκανοποιητική" προσέγγιση. Αυτό θα κάνουμε και στο υπό συζήτηση παράδειγμα:

$$V(x) \simeq V(x_0) + V'(x_0)h.$$

Όμως τη συνάρτηση V την έχουμε ήδη υπολογίσει από το προηγούμενο παράδειγμα, επομένως έχουμε

$$V(x_0) = -GM\frac{m}{x_0},$$

όπου η σταθερά C επιλέχτηκε να είναι μηδέν. Επίσης

$$V'(x_0) = GM\frac{m}{x_0^2}.$$

Ετσι, η συνάρτηση δυναμικού γράφεται

$$V(x_0+h) \simeq -GM\frac{m}{x_0} + GM\frac{m}{x_0^2}h.$$

Παρατηρήστε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι πλέον η απόσταση h, αφού το x_0 είναι δεδομένο (η ακτίνα της Γης). Επίσης, για ένα δεδομένο σώμα θα είναι γνωστό και το m, δηλαδή η μάζα του, άρα ολόκληρος ο πρώτος όρος θα είναι σταθερός. Όμως μια συνάρτηση δυναμικού είναι αδιάφορη ως προς μια σταθερά που απλώς προστίθεται, άρα η παραπάνω συνάρτηση μπορεί να γραφεί:

$$V(h) \simeq m\frac{GM}{x_0^2}h$$

και η έλκτική δύναμη της Γης κοντά στην επιφάνεια θα δίνεται από τον τύπο

$$F = -\frac{dV}{dh} \simeq -m\frac{GM}{x_0^2}.$$

Αν τέλος αντικαταστήσουμε τη σταθερά GM/x_0^2 με την επιτάχυνση της βαρύτητας g, οι δύο παραπάνω σχέσεις γίνονται

$$V(h) \simeq mgh \quad \text{και} \quad F \simeq -mg,$$

στις οποίες αναγνωρίζουμε τους γνωστούς τύπους για το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης και το βάρος ενός σώματος. Η παραπάνω διαδικασία μας υπενθυμίζει ότι οι τύποι αυτοί ισχύουν "κοντά" στην επιφάνεια της Γης και μάλιστα κατά προσέγγιση.

4.5 Η δυναμική ενέργεια

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα συντηρητικό πεδίο $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ για κάθε $\mathbf{R}$ σύνολο Ω[1]. Έστω $\mathbf{r}_0$ ένα (οποιοδήποτε) σταθερό σημείο του Ω, τότε η ενέργεια που το πεδίο δυνάμεων "δίνει" σ' ένα

[1] Το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε το $\mathbf{R}$ για ανεξάρτητη μεταβλητή, αντί για το $\mathbf{r}$ που χρησιμοποιούσαμε μέχρι τώρα είναι άνευ ουσιαστικής σημασίας.

υλικό σημείο κατά την κίνησή του από το $\mathbf{r}_0$ έως μια άλλη (μεταβλητή) θέση $\mathbf{r}$ υπολογίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}. \tag{4.18}$$

Αν αυτή η ενέργεια δίνεται πραγματικά ή όχι εξαρτάται από το πρόσημο του ολοκληρώματος (4.18). Αν η συντηρητική δύναμη αντιστέκεται στη κίνηση το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ θα είναι αρνητικό και το παραπάνω ολοκλήρωμα θα είναι θετικό δηλαδή, πράγματι θα δίνεται ενέργεια στο σωμάτιο. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από τον δρομό που θα μεταβούμε από τη θέση $\mathbf{r}_0$ στη θέση $\mathbf{r}$. Δηλαδή **η ενέργεια που δίνεται στο σωμάτιο εξαρτάται αποκλειστικά από τη θέση** $\mathbf{r}$. Μ' άλλα λόγια σε κάθε σημείο $\mathbf{r}$ αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή αυτής της ενέργειας, δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}, \tag{4.19}$$

που θα την αποκαλούμε **δυναμική ενέργεια**. Είναι προφανές ότι η δυναμική ενέργεια ενός σωματίου (ή ενός σώματος) εξαρτάται αποκλειστικά από τη θέση $\mathbf{r}$ στην οποία βρίσκεται το σωμάτιο[2] Γι' αυτό συνήθως λέμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι *η ενέργεια που κατέχει ένα σωμάτιο λόγω θέσης.*

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για το σημείο $\mathbf{r}_0$ ισχύει

$$U(\mathbf{r}_0) = 0. \tag{4.20}$$

Δηλαδή η δυναμική του ενέργεια είναι μηδέν. Αν θυμηθούμε ότι το σημείο $\mathbf{r}_0$ επιλέχθηκε αυθαίρετα, τότε συμπεραίνουμε ότι το σημείο που η δυναμική ενέργεια θεωρείται μηδενική (σημείο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας) είναι αποκλειστικά της δικής μας επιλογής. Άλλωστε η αξία της δυναμικής ενέργειας βρίσκεται στη διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ δύο σημείων και όχι στην καθαυτή τιμή της.

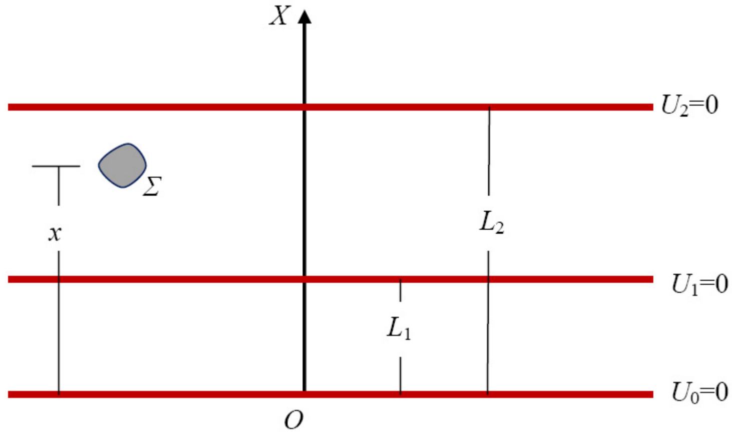
Παρατήρηση Είναι προφανές ότι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας U συνδέεται με τη συνάρτηση δυναμικού V που εισαγάγαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αυτή η σχέση εύκολα αποκαλύπτεται αν παραγωγίσουμε απλώς τη σχέση (4.19), η οποία θα μας δώσει

$$\nabla U = -\mathbf{F}. \tag{4.21}$$

Αν ανακαλέσουμε την (4.11), διαπιστώνουμε ότι η U παίζει επίσης το ρόλο της συνάρτησης δυναμικού V. Η μόνη διαφορά, που στερείται ομώς ουσίας, είναι ότι η V ορίζεται ως προς μια αυθαίρετη σταθερά, ενώ για την U έχουμε ήδη επιλέξει αυτή την σταθερά. Επομένως στο εξής είτε αναφερόμαστε στη δυναμική ενέργεια είτε στο δυναμικό θα εννοούμε πάντα την ίδια συνάρτηση.

Παράδειγμα Ας εξετάσουμε τώρα πόση δυναμική ενέργεια έχει το σώμα Σ μάζας $m = 50\,\mathrm{kg}$, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση 20 m από την επιφάνεια της Γης (Σχήμα 4.8). Γνωρίζουμε

[2] Παρατηρήστε ότι η κινητική ενέργεια δεν εξαρτάται από τη θέση αλλά από την παράγωγό της $\dot{\mathbf{r}}$.



Σχήμα 4.8. *Η δυναμική ενέργεια στο πεδίο βαρύτητας της Γης.*

από τα προηγούμενα ότι η δύναμη της βαρύτητας επί του σώματος Σ θα είναι $F = -mg$. Ακολουθώντας τις θεωρήσεις αυτής της παραγράφου, πρέπει πρώτα να επιλέξουμε το σημείο στο οποίο θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι 0, δηλαδή το επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια. Ας ξεκινήσουμε επιλέγοντας ως επίπεδο αναφοράς την επιφάνεια της Γής, δηλαδή $U_0 = 0$ για $x = 0$, τότε σύμφωνα με την (4.18) η δυναμική ενέργεια θα είναι

$$U_0(x) = -\int_0^x F dy = mg \int_0^x dy = [mgy]_0^x = mgx.$$

Αν επιλέξουμε ως επίπεδο αναφοράς για το δυναμικό το $x = L_1$, δηλαδή $U_1(L_1) = 0$, η δυναμική ενέργεια θα είναι

$$U_1(x) = -\int_{L_1}^x F dy = mg \int_{L_1}^x dy = [mgy]_{L_1}^x = mg(x - L_1).$$

Τέλος, ας δούμε μια ακόμη περίπτωση που το επίπεδο αναφοράς είναι πιο ψηλά από το σώμα, $x = L_2$ με $L_2 > 20$. Σε αυτή την περίπτωση η δυναμική ενέργεια θα μηδενίζεται στο L_2, δηλαδή $U_2(L_2) = 0$ και θα υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$U_2(x) = -\int_{L_2}^x F dy = mg \int_{L_2}^x dy = [mgy]_{L_2}^x = mg(x - L_2).$$

Μολονότι, οι τρεις διαφορετικές επιλογές οδήγησαν σε διαφορετικές δυναμικές ενέργειες, αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά

$$U_2(x) = U_0(x) - mgL_2 \quad \text{και} \quad U_1(x) = U_0(x) - mgL_1$$

και φυσικά παράγουν όλες το ίδο ακριβώς πεδίο βαρύτητας

$$F(x) = -mg = -\frac{dU_0}{dx} = -\frac{dU_1}{dx} = -\frac{dU_2}{dx}.$$

Εστω ότι $L_1 = 10$ και $L_2 = 25$, τότε η δυναμική ενέργεια του σώματος υπολογίζεται για τις τρεις περιπτώσεις ως ακολούθως:

$$U_0(20) = 50 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m} = 9810 \text{ joule},$$
$$U_1(20) = 50 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot (20 - 10) \text{ m} = 4905 \text{ joule},$$
$$U_2(20) = 50 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot (20 - 25) \text{ m} = -2452.5 \text{ joule}.$$

Επαναλαμβάνουμε ότι η καθαυτή τιμή της δυναμικής ενέργειας δεν μας δίνει καμιά πληροφορία, αν δε γνωρίζουμε το επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας. Οι παραπάνω τιμές υπολογίζουν απλώς πόση ενέργεια πρέπει να δώσουμε στο σώμα για να το μετακινήσουμε από το επίπεδο αναφοράς μέχρι το επίπεδο $x = 20$. Στην τελευταία περίπτωση, το επίπεδο αναφοράς, $L_2 = 25$, είναι ψηλότερα από το σώμα μας άρα όχι μόνο δεν χρειάζεται να προμηθεύσουμε ενέργεια στο σώμα μας, αλλά αντίθετα θα πάρουμε ενέργεια αν το μετακινήσουμε από το επίπεδο αναφοράς στο στο επίπεδο $x = 20$, γι' αυτό η δυναμική του ενέργεια έχει αρνητική τιμή.

4.6 Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

Ας επανέλθουμε τώρα στη συζήτηση της παραγράφου 4.3 όπου διερευνήσαμε τι γίνεται το έργο που προσφέρει ένα πεδίο δυνάμεων κατά την κίνηση ενός σωματίου μεταξύ δύο σημείων P_1 και P_2 του σχήματος 4.2. Σ' αυτή την παράγράφο θα εξετάσουμε το ίδιο ερώτημα στην περίπτωση όμως που το πεδίο δυνάμεων είναι συντηρητικό. Έτσι το έργο κατά την κίνηση επί της καμπύλης C_{12} θα γράφεται

$$W_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-\nabla U) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla U \cdot d\mathbf{r}. \tag{4.22}$$

Ας επικεντρωθούμε για λίγο στην υπό ολοκλήρωση ποσότητα της (4.22)

$$\nabla U \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU. \tag{4.23}$$

Αν εισάγουμε τώρα τις σχέσεις (4.22) και (4.23) στην εξίσωση (4.10) θα πάρουμε

$$\begin{aligned} W_{12} &= T(\mathbf{r}_2) - T(\mathbf{r}_1) \Rightarrow \\ &\quad -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dU = T(\mathbf{r}_2) - T(\mathbf{r}_1) \Rightarrow \\ &\quad -U(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1) = T(\mathbf{r}_2) - T(\mathbf{r}_1) \\ &\quad U(\mathbf{r}_1) + T(\mathbf{r}_1) = U(\mathbf{r}_2) + T(\mathbf{r}_2). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Η τελευταία εξίσωση αναπαριστά την **εξίσωση της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας** καθώς μας διαβεβαιώνει ότι το άθροισμα της δυναμικής και κινητικής ενέργειας διατηρείται.

Επομένως είναι φυσικό να ορίσουμε ως **ολική μηχανική ενέργεια** το άθροισμα της δυναμικής και κινητικής ενέργειας:

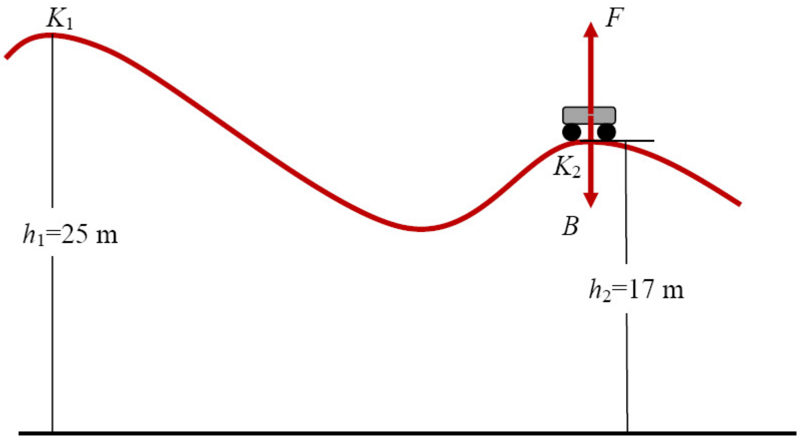
$$E(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) + T(\mathbf{r}), \tag{4.25}$$

έτσι ώστε η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας να γράφεται

$$E(\mathbf{r}) = \text{σταθερή}, \quad \forall \mathbf{r}. \tag{4.26}$$

Φυσικά δεν πρέπει να λησμονούμε ότι η εξίσωση (4.26) ισχύει μόνο όταν οι δυνάμεις που επιδρούν πάνω σ' ένα σώμα είναι συντηρητικές. Στη γενικώτερη περίπτωση των μη-συντηρητικών δυνάμεων η διατήρηση της ενέργειας εκφράζεται από την εξ. (4.10), όπως ήδη έχουμε τονίσει στην παράγραφο 4.3.

Παράδειγμα Ένα βαγονάκι λούνα-παρκ αφήνεται από μια κορυφή ύψους 25 m να κύλησει χωρίς τριβή επί σιδηροτροχιάς. Η επόμενη κορυφή που θα συναντήσει έχει ύψος 17 m όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.9. Τι ακτίνα καμπυλότητας θα πρέπει να έχει η σιδηροτροχιά στο σημείο K_2 ώστε να μην εκτροχιάζεται το βαγονάκι;



Σχήμα 4.9.

Για να μην εκτροχιάζεται το βαγονάκι θα πρέπει η φυγόκεντρη δύναμη F στο K_2 να έχει μέτρο το πολύ ίσο με την κεντρομόλο δύναμη που στην προκειμένη περίπωση είναι το βάρος του βαγονιού. Από την εξ. (2.30) γνωρίζουμε ότι το μέτρο της φυγόκεντρης δύναμης είναι ίσο με mv^2/R. Θα πρέπει συνεπώς να ισχύει η ανισότητα

$$mg \geq \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R \geq \frac{v^2}{g},$$

όπου R είναι η ακτίνα καμπυλότητας και v η ταχύτητα του βαγονιού στο K_1. Η τελευταία όμως μπορεί να υπολογιστεί από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$\begin{aligned}
&U(K_1) = U(K_2) + T(K_2) \Rightarrow \\
&mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \\
&25mg = 17mg + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \\
&8g = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow \\
&v^2 = 16g.
\end{aligned}$$

Αν εισάγουμε την τιμή της ταχύτητας στην ανισότητα παραπάνω, θα πάρουμε

$$R \geq \frac{16g}{g} = 16\ m.$$

Μ' άλλα λόγια, η ακτίνα καμπυλότητας στο K_1 θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 16 m.