

ξεχωρίζει δια μιας, στην κατάσταση που ζει, αυτό που είναι στην ουσία το α-διδακτικό και αυτό που είναι από την προέλευσή του διδακτικό" (Brousseau, 1991, σελ. 76).

4. ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ 'Η ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ TORAZE

Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται για να περιγράψει εκείνες τις περιπτώσεις όπου η διατύπωση των ερωτήσεων, η διατύπωση των προβλημάτων είναι τέτοια ώστε ουσιαστικά να υποβάλλει τη σωστή απάντηση στο μαθητή. Π.χ. "δεν είναι τέσσερα τα αυτοκίνητα;" Πάρα πολλές ασκήσεις που απευθύνονται στα παιδιά του νηπιαγωγείου χαρακτηρίζονται από φαινόμενο Toraze. Η απάντηση υποδεικνύεται από τον τρόπο που τα αντικείμενα ή οι αναπαραστάσεις αυτών είναι τοποθετημένα στο χώρο: π.χ. σε μια άσκηση ζητείται "κύκλωσε με μια γραμμή τα αντικείμενα που είναι στρόγγυλα" και υπάρχουν στη μια πλευρά της σελίδας τα στρόγγυλα και στην άλλη άκρη συγκεντρωμένα τα μη στρόγγυλα αντικείμενα.

5. ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ 'Η ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ JOURDAIN

Η αναγνώριση από τον διδάσκοντα της συμπεριφοράς του μαθητή σε κοινότυπες ή συνηθισμένες ή επαναλαμβανόμενες δραστηριότητες ως ένδειξη κατανόησης της μαθηματικής γνώσης που αυτές προϋποθέτουν σχετίζεται με το φαινόμενο Jourdain. Η εξάσκηση π.χ. σε δραστηριότητες λογικών σχέσεων με τη βοήθεια του υλικού Dienes σημαίνει και κατανόηση των λογικών σχέσεων ως τέτοιες; Η επανάληψη της αραίωσης-πύκνωσης ίσου πλήθους αντικειμένων που οδηγεί το παιδί στην επανάληψη της απάντησης "ναι, έχουμε τόσα όσα" σημαίνει κατανόηση της διατήρησης του πλήθους ή απλώς σημαίνει την αναγνώριση από το παιδί του γεγονότος ότι έχουμε μία κατάσταση στην οποία απαντάμε με αυτόν τον τρόπο;

Το παρακάτω παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό αυτής της κατάστασης, όπου δηλαδή το παιδί απαντάει επαναλαμβάνοντας την ίδια απάντηση με τα παιδιά που προηγήθηκαν.

Παράδειγμα: Η νηπιαγωγός θέλει να κάνει μια δραστηριότητα με στοχο να προσεγγίσουν τα παιδιά τις έννοιες "βαρύ-ελαφρύ" και "άδειο-γεμάτο". Για το σκοπό

αυτό, τοποθετεί 2 μπουκάλια, ένα άδειο και ένα γεμάτο, πάνω σ' ένα τραπέζι. Ζητάει από τα παιδιά να έρθουν ένα-ένα, να κρατήσουν με τα χέρια τους τα μπουκάλια, να πουν ποιο είναι το βαρύ, ποιο είναι το ελαφρύ, ποιο είναι το άδειο και ποιο το γεμάτο και να αφήσουν μετά τα μπουκάλια στη θέση τους.

Ο Νίκος είναι το **τέταρτο** νήπιο που έρχεται να κάνει τη δοκιμή. Πλησιάζει το τραπέζι και, **χωρίς να κρατήσει τα μπουκάλια, δίνει τη σωστή απάντηση**. Η νηπιαγωγός τον διορθώνει λέγοντάς του να κρατήσει πρώτα τα μπουκάλια και μετά να απαντήσει. Ο Νίκος υπακούει και ξαναδίνει την ίδια απάντηση.

6. ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΟ Ή ΜΕΤΑΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΟΛΙΣΘΗΜΑ

Με τον όρο **μεταγνωστικό ή μεταδιδασκτικό ολισθήμα** αναφερόμαστε στις περιπτώσεις όπου ο λόγος από τα μαθηματικά αντικείμενα έχει περάσει στην αναπαράστασή τους.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα μεταγνωστικού ολισθήματος είναι η αναγνώριση των γεωμετρικών σχημάτων από την μορφή τους: π.χ. αυτό είναι τετράγωνο ή αυτό είναι κύκλος, χωρίς να αναφερόμαστε στα χαρακτηριστικά εκείνα που μας επιτρέπουν να ελέγξουμε το ότι το αναφερόμενο σχήμα είναι τετράγωνο ή κύκλος. Έτσι έχουμε συχνά ως αποτέλεσμα τη δημιουργία παρανοήσεων ή λανθασμένων αντιλήψεων για τις μαθηματικές έννοιες, όπως φαίνεται στο παρακάτω επεισόδιο: Δείχνουμε στα νήπια διάφορα γεωμετρικά σχήματα από χαρτόνι. Ο Κώστας, όταν του δείχνουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (διαστάσεων 10x15 εκατοστών), λέει ότι είναι "ένα μεγάλο τετράγωνο". Η Μαρία, όταν της δείχνουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, λέει ότι είναι "ένα τρίγωνο-τετράγωνο".

Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα μεταγνωστικού ολισθήματος αποτελεί ο παρακάτω διάλογος:

Δασκ.: Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στο 11 και το 6;

Μαθ.: Το 11 έχει δύο αριθμούς.

Δασκ.: Όχι, ..., προσπάθησε ξανά.

Μαθ.: Το 6 είναι κουλουριασμένο.

7. ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΕΔΙΟ - ΠΑΙΧΝΙΑ ΠΛΑΙΣΙΩΝ

ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗ ΕΡΓΑΛΕΙΟ / ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Μια μαθηματική έννοια δεν υπάρχει από μόνη της. Σχετίζεται με προβλήματα, με τρόπους αναπαράστασης, με διαδικασίες ελέγχου και υπολογισμών. Στο πλαίσιο αυτό, μέσα από το οποίο παίρνει νόημα και αντλεί τη σημασία της, συνδέεται με άλλες μαθηματικές έννοιες. Π.χ. τα μεγέθη, όπως π.χ. το πλήθος, το μήκος, το εμβαδόν, ο όγκος συνδέονται με τα γεωμετρικά σχήματα και σώματα που τα μεγέθη αυτά περιγράφουν, συνδέονται με τις διαδικασίες μέτρησης καθώς και με την έννοια του αριθμού, αφού τα διάφορα μεγέθη τα ποσοτικοποιούμε με τη βοήθεια των αριθμών. Το σύνολο των εννοιών, οι οποίες με τον τρόπο αυτό αλληλοσυνδέονται το ονομάζουμε **εννοιολογικό πεδίο**.

Μια έννοια μπορεί να ανήκει σε πολλά εννοιολογικά πεδία (π.χ. οι αριθμοί). Ταυτόχρονα, ανάλογα με τα προβλήματα στα οποία εμπλέκεται μια έννοια μπορεί να έχει πολλές μορφές (αναπαραστάσεις) και σημασίες. Π.χ. το εμβαδόν είναι μια **γεωμετρική έννοια**, όταν συνδέεται με τα σχήματα και την ιδιότητα αυτών ως προς το εμβαδόν. Είναι όμως και μία **αριθμητική έννοια**, όταν συνδέεται με τον αριθμό που εκφράζει το μέτρο του εμβαδού (π.χ. στις υπολογιστικές ασκήσεις εύρεσης των εμβαδών σχημάτων μέσω των τύπων). Είναι όμως και **έννοια της ανάλυσης**, όταν θεωρήσουμε τη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε σχήμα την αριθμητική τιμή του εμβαδού του.

Η κατανόηση μιας έννοιας καθορίζεται από τα πλαίσια όπου αυτή εξετάζεται. Είναι προφανές ότι περιορισμένος αριθμός πλαισίων έχει ως αποτέλεσμα περιορισμένη κατανόηση της έννοιας. Επίσης υπερβολική έμφαση σ' ένα μόνο πλαίσιο οδηγεί σε στερεότυπα σχετικά με την έννοια αυτή και δυσκολίες στην αναγνώρισή της σε άλλο πλαίσιο. Έτσι η εισαγωγή μιας έννοιας σ' ένα μόνον πλαίσιο (ένα είδος προβλημάτων, ένα είδος αναπαραστάσεων) έχει ως αποτέλεσμα και την περιορισμένη κατανόηση αυτής της έννοιας και τη δημιουργία στερεοτύπων. Έτσι π.χ. τα παιδιά της 2ας Δημοτικού δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ως τρίγωνο, μια που στο νηπιαγωγείο και την 1η Δημοτικού το τρίγωνο εμφανιζόταν πάντα ως ισόπλευρο.

Τα αποτελέσματα ερευνών έχουν δείξει την αναγκαιότητα της εναλλαγής πλαισίων από τα πρώτα βήματα για την εισαγωγή μιας έννοιας: **το παιχνίδι των πλαισίων** θεωρείται, λοιπόν, ως απαραίτητη διδακτική μεταβλητή για τη σωστή προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών από τα πρώτα βήματα στα Μαθηματικά.

Στα πλαίσια των εννοιολογικών πεδίων οι εμπλεκόμενες έννοιες εμφανίζονται άλλοτε ως **εργαλεία** για την προσέγγιση άλλων εννοιών ή για την επίλυση προβλημάτων και άλλοτε ως **αντικείμενα** μελέτης. Π.χ. μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι στο εννοιολογικό πεδίο των μεγεθών οι αριθμητικές έννοιες έχουν ρόλο εργαλείου. Όταν όμως μελετάμε τη σχέση των αριθμών και εξετάζουμε αν το 2 είναι μικρότερο από το 3 ή ότι 5 αντικείμενα μπορούν να χωρισθούν δύο ομάδες που η μία θα αποτελείται από 2 αντικείμενα και η άλλη από 3, τότε οι αριθμητικές έννοιες έχουν ρόλο αντικειμένου. Η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών γεννιέται μέσα από τη διαπραγμάτευση των εννοιών σε πλαίσια όπου αυτές είναι εργαλεία και σε πλαίσια όπου αυτές είναι αντικείμενο μελέτης. Το νόημά τους το παίρνουν μέσα από τη **διαλεκτική σχέση αντικειμένου/εργαλείου**. Η διδακτική προσέγγιση που αντιμετωπίζει τις έννοιες πρώτα ως αντικείμενα (φαινόμενα) και μετά ως εργαλεία (συνήθως οι εφαρμογές έπονται) στερεί τις έννοιες από εκείνο το εννοιολογικό πλαίσιο όπου αυτές παίρνουν το νόημά τους (οργανώνουν τα φαινόμενα κατά τη διδακτική φαινομενολογία).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ 1: Δραστηριότητες στις λογικές πράξεις

α) Δίνεται ένα σύνολο που αποτελείται από τα παρακάτω αντικείμενα: 2 κόκκινα τρίγωνα, 2 κίτρινα τρίγωνα, 4 πράσινα τετράγωνα, 2 κόκκινα τετράγωνα, 1 κίτρινο τετράγωνο, 3 κόκκινοι κύκλοι και 2 πράσινοι κύκλοι. Το σύνολο αυτό το ονομάζουμε Α. Να βρείτε τα υποσύνολα του Α στα οποία είναι αληθής η πρόταση “αν το σχήμα είναι κόκκινο τότε είναι τετράγωνο”. Επίσης τα υποσύνολα του Α στα οποία είναι αληθής η πρόταση “το σχήμα είναι τετράγωνο αν και μόνο αν είναι κόκκινο”.

β) Σ' ένα κουτί υπάρχουν κόκκινα τρίγωνα, πράσινα τετράγωνα και μπλε κύκλοι. Η νηπιαγωγός παίρνει ένα σχήμα, το κρύβει στα χέρια της και λέει στα παιδιά: «δεν είναι τετράγωνο, δεν είναι μπλε, τι είναι;».

Να περιγράψετε την πρόταση της νηπιαγωγού με τη βοήθεια λογικών σχέσεων. Να διατυπώσετε μια ισοδύναμη λογικά πρόταση.

ΘΕΜΑ 2: Θεωρίες μάθησης

Όταν τα παιδιά συγκρίνουν τις δύο σειρές από μπίλιες του παρακάτω σχήματος, συνήθως απαντούν ότι υπάρχουν περισσότερες μπίλιες στη δεύτερη σειρά.



Να δώσετε δύο τουλάχιστον διαφορετικές ερμηνείες της απάντησης των παιδιών.

ΘΕΜΑ 3: Δραστηριότητα στη διατήρηση του πλήθους

Η Νηπιαγωγός παρουσίασε στα παιδιά 5 σανδάλια και 5 στεφάνια τοποθετημένα σε δύο σειρές. Αφού ρώτησε τα παιδιά πόσα σανδάλια και πόσα στεφάνια υπάρχουν, άρχισε να πυκνώνει ή να αραιώνει τότε τα σανδάλια και τότε τα στεφάνια.

Όταν έφτασε η σειρά του Ορέστη ήταν αραιωμένα τα σανδάλια.

Νηπ.: Πόσα σανδάλια και πόσα στεφάνια έχουμε Ορέστη;

Ορ.: Έχουμε 5 σανδάλια και 5 στεφάνια.

Νηπ.: Άρα έχουμε τόσα σανδάλια όσα και στεφάνια.

Ορ.: Ναι, έχουμε τόσα σανδάλια όσα και στεφάνια.

Όταν έφτασε η σειρά της Αντιγόνης ήταν αραιωμένα τα στεφάνια.

Νηπ.: Πόσα στεφάνια και πόσα σανδάλια έχουμε Αντιγόνη;

Αντ.: Τα στεφάνια είναι πιο πολλά.

Νηπ.: Για μέτρησε ξανά.

Αντ.: Έχουμε 5 και 5.

Νηπ.: Άρα έχουμε τόσα σανδάλια όσα και στεφάνια;

Αντ.: Ναι, έχουμε τόσα σανδάλια όσα και στεφάνια.

Να αναλύσετε από διδακτική άποψη την παραπάνω δραστηριότητα.

ΘΕΜΑ 4: Δραστηριότητες στις αριθμητικές έννοιες

Δίνονται δύο δραστηριότητες. Να αναλύσετε και να σχολιάσετε από διδακτική άποψη τις δύο αυτές εκδοχές: είναι προβληματικές καταστάσεις, ποια χαρακτηριστικά της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων εμφανίζονται κατά τη διαπραγμάτευση των δραστηριοτήτων; ποια χαρακτηριστικά του διδακτικού συμβολαίου εμφανίζονται;

Δραστηριότητα 1: Παίρνει η νηπιαγωγός 3 μολύβια και ρωτάει τα παιδιά "πόσα μολύβια έχω στο χέρι μου;". Στη συνέχεια παίρνει άλλα δύο μολύβια και ρωτάει τα παιδιά "πόσα μολύβια έχω τώρα;".

Δραστηριότητα 2: Ζητά η νηπιαγωγός από τα παιδιά να πάρουν από πέντε ξυλάκια το καθένα. Αφού ελεγχθεί η ορθότητα της ενέργειας των παιδιών, η νηπιαγωγός ζητά από

τα παιδιά να μοιράσουν τα ξυλάκια στα δυο χέρια τους και να κλείσουν τις παλάμες τους. Στη συνέχεια ζητά από κάθε παιδί να έλθει στο κέντρο του κύκλου και να ανοίξει το δεξί ή το αριστερό χέρι του. Ύστερα ζητά από τα υπόλοιπα παιδιά να μαντέψουν πόσα ξυλάκια κρύβονται στο κλειστό χέρι του παιδιού.

ΘΕΜΑ 5: Δραστηριότητα εισαγωγής στον αριθμό 1

Να αναλυθεί η παρακάτω δραστηριότητα από διδακτική άποψη.

Στόχος της δραστηριότητας που ακολουθεί ήταν, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, να προσεγγίσουν τα παιδιά την έννοια του αριθμού ένα και να εξοικειωθούν με το σύμβολό του 1 με τη διαδικασία της 1-1 αντιστοίχισης δύο ομάδων αντικειμένων.

Η νηπιαγωγός πήρε τέσσερεις μαρκαδόρους στο χέρι της και ρώτησε τα παιδιά:

Ν(νηπιαγωγός): Πόσοι είναι αυτοί οι μαρκαδόροι;

Π(αιδιά): Τέσσερεις

Ν: Οι τέσσερεις είναι πολλοί ή λίγοι;

Π: Πολλοί.

Η νηπιαγωγός κρύβει τους τρεις μαρκαδόρους.

Ν: Πόσους μαρκαδόρους έχω στα χέρια μου;

Π: Ένα.

Η νηπιαγωγός έγραψε τον αριθμό 1 στον πίνακα και τον κύκλωσε με χρωματιστή κιμωλία. Έπειτα, αφού κάθε παιδί τον επανέλαβε, μοίρασε στα παιδιά καρτέλες όπου ήταν ζωγραφισμένα τρία σκιουράκια και τέσσερα κάστανα (βλ. σχήμα).



Ζήτησε από τα παιδιά να παρατηρήσουν καλά την εικόνα και να πουν τι βλέπουν.

N: Σ' αυτήν την καρτέλα είναι πολλά ή ένα σκιουράκι;

Π: Πολλά.

N: Για δείξτε με τα δάχτυλα του χεριού.

Τα νήπια δείχνουν τρία.

N: Τώρα θα ενώσετε κάθε σκιουράκι με κάθε κάστανο με διαφορετικό χρώμα μαρκαδόρο και αυτό που περισσεύει θα το βάλετε σ' ένα κυκλάκι. Καταλάβατε;

Π: Ναι.

Τα νήπια, αφού αντιστοίχισαν ένα σκιουράκι με ένα κάστανο και έβαλαν σε κύκλο το κάστανο που περισσεύει, ρώτησαν τη νηπιαγωγό αν το έκαναν καλά. Η νηπιαγωγός, κοιτώντας ένα-ένα τα χαρτιά, έλεγε μπράβο σ' όποιο παιδί το είχε κάνει σωστά. Κάποια παιδιά όμως έβαλαν μόνο σε κύκλο το κάστανο που περισσεύει, ενώ δύο προνήπια δεν το έκαναν καθόλου.

Η νηπιαγωγός πήρε το χαρτί του Άρη και είπε:

N: Έχω ένα, δύο, τρία, τέσσερα κάστανα και ένα, δύο, τρία σκιουράκια. Πόσα κάστανα είναι;

Α(ρης): Τέσσερα.

N: Και τα σκιουράκια τρία, ε;

Α: Ναι.

N: Είναι ίσα-ίσα;

Π: Όχι.

N: Παίρνω ένα χαρτί στην τύχη, του Δημήτρη. Κοιτάζετε πώς το έκανε. Σωστά, μπράβο Δημήτρη. Θα μας εξηγήσεις τι έκανες;

Δ(ημήτρης): Το πρώτο σκιουράκι και το πρώτο κάστανο το έκανα με μπλε χρώμα, το δεύτερο σκιουράκι και το δεύτερο κάστανο το ζωγράφισα με κίτρινο χρώμα και το τρίτο σκιουράκι με το τρίτο κάστανο με πράσινο χρώμα και αυτό που μένει με κόκκινο, έκανα έναν κύκλο.

N: Πολύ ωραία. Να σας ρωτήσω όμως κάτι. Τι σημαίνει μένει; Περισσεύει;

Δ: Αυτό που περισσεύει δε μας χρειάζεται.

Μ(αρία): Ότι ένα δεν κάνει να μπει με τα άλλα.

N: Ναι. Σημαίνει ότι αυτό που μένει δεν κάνει ζευγαράκι με κάτι άλλο. Για παράδειγμα, αν είχαμε δύο μπουκάλια και κάποιος έπαιρνε το ένα, δεν θα έμενε ένα;

Π: Ναι.

Η νηπιαγωγός συνέχισε με τη δεύτερη εικόνα της ίδιας καρτέλας, όπου υπήρχαν δύο καπέλα και τρεις περότοι.

Ν: Πόσα καπέλα έχω;

Π: Δύο.

Ν: Πόσοι είναι οι περότοι;

Π: Τρεις.

Ν: Επειδή, λοιπόν, οι περότοι είναι πιο πολλοί από τα καπέλα, θα ζωγραφίσετε σ' αυτόν τον περότο, που δεν έχει καπέλο, έναν άλλο δικό σας.

Τα παιδιά ζωγράφισαν σωστά και αντιστοίχισαν ένα καπέλο σε έναν περότο. Έπειτα η νηπιαγωγός μοίρασε στα παιδιά καρτέλες με μία αλεπού και τρεις κότες. Αφού τα ρώτησε τι βλέπουν, πήγε στη δεύτερη εικόνα της ίδιας καρτέλας όπου υπήρχαν δύο αλεπούδες και τρεις κότες.

Ν: Εδώ πόσες αλεπουδίτσες και πόσες κότες έχουμε;

Π: Δύο αλεπουδίτσες και τρεις κοτούλες.

Ν: Ποιες είναι πιο πολλές, οι αλεπουδίτσες ή οι κοτούλες;

Π: Οι κοτούλες.

Ν: Λοιπόν, κάθε μία αλεπού θέλει να φάει μία κότα. Και εδώ θα κάνετε το ίδιο, όπως και στην εικόνα με τα σκιουράκια και τα κάστανα. Το θυμάστε πώς το κάναμε;

Π: Ναι.

Ν: Θα ενώσετε μία αλεπού με μία κοτούλα και ό,τι περισσεύει θα το βάζετε σε κύκλο.

Τα παιδιά μόλις τέλειωσαν έδωσαν τα χαρτιά στη νηπιαγωγό. Μετά η νηπιαγωγός έδειξε σε κάθε ένα παιδί χωριστά τα χαρτί του και ρωτούσε:

Ν: Αυτές οι αλεπούδες είναι πολλές;

π: Είναι δύο.

Ν: Οι δύο είναι πολλές, έτσι δεν είναι;

π: Ναι.

Στο τέλος της δραστηριότητας η νηπιαγωγός λέει στα παιδιά:

Ν: Αυτό το σύμβολο, που έγραψα πριν στον πίνακα, είναι το ένα. Το ξέρατε;

Π: Ναι!!!!

ΘΕΜΑ 6: Πρόβλημα μοιρασιάς της τούρτας

Η δραστηριότητα που ακολουθεί (η διδασκαλία έγινε από τη νηπιαγωγό κ. Αθηνά Μπόνια) να αναλυθεί ως προς τις φάσεις και ως προς τις καταστάσεις μιας διαδικασίας επίλυσης προβλήματος.

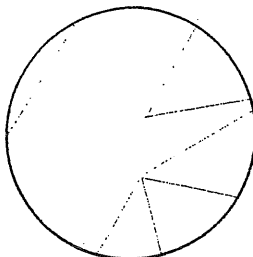
Η νηπιαγωγός παρουσιάζει στρόγγυλες τούρτες από χαρτόνι. Ζητάει από τα παιδιά να χωριστούν ελεύθερα σε ομάδες και η κάθε ομάδα να διαλέξει μία τούρτα. Τα παιδιά χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, αγόρια και κορίτσια. Η νηπιαγωγός ζητάει από την κάθε ομάδα να σκεφτεί και να μοιράσει την τούρτα σε ίσα κομμάτια.

Πρώτη συνεδρία

Ομάδα αγοριών (4 αγόρια)

- Νηπ.: Λουπόν, θα ήθελα να ακούσω πώς σκέφτεστε να μοιράσετε την τούρτα σε ίσα κομμάτια.
- Ντίνος: Είμαστε 4 και θα κόψουμε 4 κομμάτια.
- Αλέξ: Και θα πάρουμε από ένα.
- Κων/νος: Ο Αντώνης θα πάρει μικρό, είναι προνήπιο.
- Νηπ.: Πώς είπα εγώ να είναι τα κομμάτια;
- Ντίνος: Ίσα, κυρία.
- Νηπ.: Λουπόν, πώς σκέφτεστε να την κόψετε για να πάρετε όλοι από ένα ίσο κομμάτι;
- Αντώνης: Με μαχαίρι.
- Κων/νος: Με ψαλίδι, γιατί είναι ψεύτικη. (Παίρνει ένα ψαλίδι).
- Νηπ.: Πριν την κόψετε θα ήθελα να ακούσω με ποιον τρόπο σκέφτεστε να κόψετε τα ίσα κομμάτια. Να ακούσουμε και τα κορίτσια τι λένε.
(Ο Ντίνος παίρνει το ψαλίδι και κόβει μία γωνία - σχήμα 1).
- Νηπ.: Ντίνο, δεν μας είπες τη σκέψη σου.
- Αλέξ: Όχι έτσι (αρπάζει το ψαλίδι).
- Νηπ.: Πώς λες, Αλέξανδρε, να κόψουμε τα ίσα κομμάτια;
- Αλέξ: Προς τα μέσα.
- Νηπ.: Δηλαδή;

- Αλέξ: Θα σου δείξω.
 - Νηπ.: Οι υπόλοιποι συμφωνούν να μας δείξει ο Αλέξανδρος;
 - Ντίνος: Εγώ δεν έκοψα καλά, να κόψει ο Αλέξανδρος.
- (Ο Αλέξανδρος κόβει ακανόνιστα 4 τριγωνικά κομμάτια- σχήμα 1)



σχήμα 1

- Νηπ.: Κόπηκε η τούρτα σε ίσα κομμάτια;
- Ντίνος: Περίσσεψε, γιατί είμαστε λίγοι.
- Αλέξ: Έπρεπε να κόψω μεγαλύτερα.
- Νηπ.: Είναι τα κομμάτια ίσα μεταξύ τους;

(Τα συγκρίνουν με το μάτι και ο Ντίνος παίρνει το κομμάτι του Αλέξανδρου και, βάζοντας το ένα πάνω στο άλλο, διαπιστώνει ότι το κομμάτι του είναι πιο μικρό και θυμώνει)

- Ντίνος: Θα πάρω το μεγάλο (εννοεί την τούρτα που περίσσεψε).
- Οι υπόλοιποι δεν συμφωνούν.
- Νηπ.: Κόπηκε η τούρτα σε ίσα κομμάτια;
- Κων/νος: Εγώ έχω μικρότερο από τον Αντώνη που είναι προνήπιο (το διαπιστώνει βάζοντας το ένα πάνω στο άλλο).
- Νηπ.: Δεν σας βλέπω ευχαριστημένους που δεν πήρατε από ένα ίσο κομμάτι. Θα σας δώσω μια άλλη τούρτα να τη μοιράσετε σε ίσα κομμάτια. Αλλά πρώτα ας δούμε τι σκέφτηκαν τα κορίτσια.

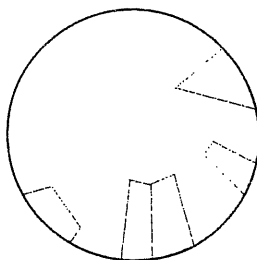
Ομάδα κοριτσιών (5 κορίτσια)

- Νηπ.: Για ν' ακούσω πώς σκέφτεστε να τη μοιράσετε σε ίσα κομμάτια.
- Φανή: Είμαστε πέντε.
- Δήμητρα: Θα κόψουμε πέντε (κομμάτια).

Η Φανή ετοιμάζεται να κόψει.

- Νηπ.: Πες μας Φανή τη σκέψη σου.
- Δήμητρα: Περίμενε κυρία, θα δεις.

Η Φανή μιμούμενη τα αγόρια, κόβει πέντε ακανόνιστα κομμάτια (σχήμα 2).



σχήμα 2

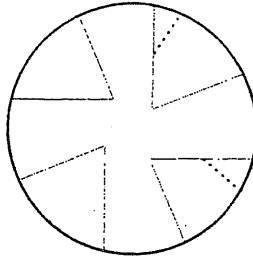
- Αλεξ.: Α! Ούτε εσείς το κόψατε καλά!
- Νηπ.: Δηλαδή;
- Ντίνος: Δεν είναι ίσα, μετρήστε τα (παροτρύνει τα κορίτσια να τα ταυτίσουν)
Τα κορίτσια διαπιστώνουν ότι δεν πήραν από ένα ίσο κομμάτι, άρα η τούρτα δεν κόπηκε καλά.
- Νηπ.: Δηλαδή η τούρτα δεν κόπηκε σε ίσα κομμάτια;
- Κορ.: Όχι (δεν προβληματίστηκαν από το αποτέλεσμα των αγοριών).
- Νηπ.: Προτείνω, λοιπόν, να πάρει η κάθε ομάδα μία νέα τούρτα και να σκεφτούμε έναν άλλο τρόπο για να τη μοιράσουμε σε ίσα κομμάτια.

Δεύτερη συνεδρία

Ομάδα αγοριών

- Νηπ.: Για να ακούσω, βρήκατε κανέναν άλλον τρόπο να την κόψουμε σε ίσα κομμάτια;
- Αλεξ.: Κυρία, θα κόψουμε δύο-δύο.
- Νηπ.: Δηλαδή, πώς;
- Αλεξ.: Θα κόψω και θα το βάλω από πάνω (κάνει κινήσεις με τα χέρια).
- Νηπ.: Και μετά;
- Αλεξ.: Θα κοπεί ίδιο (κομμάτι ίσο).
- Ντίνος: Μπράβο Αλέξανδρε, το βρήκες;
- Νηπ.: Οι άλλοι συμφωνούν;

Τα αγόρια ναι, τα κορίτσια δεν έχουν γνώμη. Ο Αλέξανδρος κόβει ένα τριγωνικό κομμάτι, το βάζει πάνω στην τούρτα και προσπαθεί να κόψει ένα δεύτερο κομμάτι. Το κομμάτι γλιστράει, ψαλιδίζεται, αλλά επιμένει και κόβει μ' αυτόν τον τρόπο συνολικά τέσσερα κομμάτια. Με αγωνία τα ταυτίζουν και διαπιστώνουν ότι αν ο Αλέξανδρος έκοβε προσεκτικά και δεν γλιστρούσε το χαρτόνι, τα κομμάτια θα ήταν ίσα (σχήμα 3).



σχήμα 3

- Νηπ.: Το κομμάτι της τούρτας που περίσσεψε είναι ίσο με το δικό σας;
- Αντώνης: Να το φας εσύ, που είσαι μεγάλη (δηλαδή το κομμάτι είναι μεγάλο).
- Κων/νος: Ο Αλέξανδρος έπρεπε να κόψει μεγαλύτερα κομμάτια (για να μην περισσέψει).

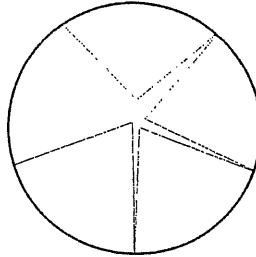
Ομάδα κοριτσιών

- Νηπ.: Για να δούμε τα κορίτσια. Τι τρόπο σκέφτηκαν για να την κόψουν σε ίσα κομμάτια;
- Φανή: Θα κόψουμε και θα το βάλουμε από κάτω.
- Αλέξ.: Α! Όχι το ίδιο που έκανα εγώ!
- Νηπ.: Περίμενε Αλέξανδρε, να καταλάβουμε τη σκέψη τους.
- Βίκυ: Θα κόψουμε πέντε γιατί είμαστε πέντε.
- Νηπ.: Συμφωνείς με τον τρόπο της Φανής;
- Βίκυ: Από πάνω, όχι από κάτω (το κομμάτι).
- Νηπ.: Και λέτε να μοιραστεί η τούρτα μ' αυτόν τον τρόπο σε ίσα κομμάτια;
- Ντίνος: Θα γίνει σαν τη δικιά μας.
- Φανή: Θα κόψουμε πιο μεγάλα για να μην περισσέψει.

Επαναλαμβάνει τον τρόπο κοψίματος των αγοριών με καλύτερα αποτελέσματα (σχήμα 4)

- Νηπ.: Λοιπόν, τι βλέπετε;
- Δήμητρα: Το ένα είναι στραβό και έχει μύτες.

- Αλέξ.: Τα κορίτσια έκαναν σαν εμάς.
- Νηπ.: Δηλαδή;
- Ντίνος: Ε! δεν την έκοψαν καλά!
- Νηπ.: Πάλι οι τούρτες δεν κόπηκαν σε ίσα κομμάτια!

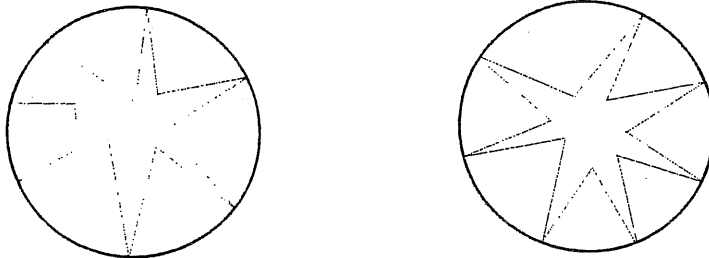


σχήμα 4

Συμφωνούμε να ξανακόψουμε άλλες τούρτες, μια άλλη μέρα, για να το πετύχουμε.

Τρίτη συνεδρία

Σήμερα είναι παρόντα 5 αγόρια και 6 κορίτσια. Κάνουν πάλι δύο ομάδες σύμφωνα με το φύλο. Παρουσιάζονται οι τούρτες. Τα παιδιά συζητούν μεταξύ τους και αποφασίζουν να κόψουν τα κομμάτια μεγαλύτερα και με προσοχή, για να γίνουν ίσα. Οι προηγούμενες εμπειρίες βοήθησαν ώστε, με το μάτι αυτή τη φορά, να κοπούν οι τούρτες ομοιόμορφα. Τα παιδιά παρατηρούσαν και σύγκριναν τα κομμάτια που θα πάρουν, αν είναι ίσα (σχήμα 5).



σχήμα 5

- Νηπ.: Το μεσαίο κομμάτι της τούρτας είναι ίσο με τα άλλα; (και για τις 2 τούρτες)
- Αντώνης: Είναι μεγάλο και να το φας εσύ!
- Νηπ.: Εγώ θάθελα ένα κομμάτι ίσο με το δικό σας.
- Αλέξ.: Να, πάρε το δικό μου.
- Ντίνος: Και να φας εσύ το μεγάλο; Α, όχι!

- Νηπ.: Πάλι τα κομμάτια δεν είναι ίσα!
- Αλέξ.: Αυτό το είδαμε.
- Ντίνος: Είναι δύσκολο κυρία.
- Νηπ.: Πού θα πάει; Εγώ πιστεύω ότι αν ξαναπροσπαθήσουμε με πιο πολύ προσοχή, θα τα καταφέρουμε.
- Δήμητρα: Όχι σήμερα, άλλη μέρα.
- Αλέξ.: Φτάνουν αυτές που φάγαμε.
- Νηπ.: Άλλη μέρα που θα έχουμε όρεξη να φάμε τούρτα, θα ξαναπροσπαθήσουμε.

Τέταρτη συνεδρία

Σήμερα είναι παρόντα 4 αγόρια και 5 κορίτσια. Τα παιδιά σήμερα έχουν αγωνία γιατί θέλουν να τα καταφέρουν. Μετρούν πόσα άτομα είναι στην κάθε ομάδα. Τα αγόρια ισχυρίζονται ότι η ομάδα τους σήμερα θα τα καταφέρει. Τα κορίτσια είναι διστακτικά γιατί βλέπουν τον ενθουσιασμό των αγοριών. Αποφασίζουν να διώξουν τη Βάσω, που είναι προνήπιο, για να είναι τέσσερα, όσα και τα αγόρια.

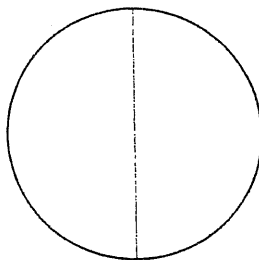
- Νηπ.: Η Βάσω δεν θα φάει σήμερα τούρτα;
- Δήμητρα: Εμείς θέλουμε να είμαστε τέσσερεις, όπως και τα αγόρια.
- Αλέξ.: Τα κορίτσια ζηλεύουν.
- Ντίνος: Η Βάσω να κόψει μια άλλη τούρτα με την κ. Εύη (η άλλη νηπιαγωγός της τάξης).
- Νηπ.: Συμφωνώ, αν συμφωνεί και η Βάσω.
- Βάσω: Ναι (με το κεφάλι).
- Νηπ.: Σήμερα, λοιπόν, έχουμε τρεις ομάδες και θα κόψουμε τρεις τούρτες. Να δω ποια ομάδα θα κόψει την τούρτα της σε ίσα ακριβώς κομμάτια. Να ακούσω τι σκεφτήκατε.
- Ντίνος: Η κ. Εύη και η Βάσω θα φάνε πολύ τούρτα γιατί είναι δύο.
- Εύη: Τι να κάνουμε! Είμαστε μόνο δύο, αλλά η Βάσω δεν μου λέει πώς να κόψουμε τα ίσα κομμάτια. Μήπως κανείς από σας μπορεί να μας βοηθήσει;
- Δήμητρα: Είσατε δύο και θα πάρετε από μισή τούρτα. Έτσι μας μοιράζει η μαμά τη σοκολάτα άμα είναι μεγάλη.
- Νηπ.: Με ποιον τη μοιράζεσαι Δήμητρα;
- Δήμητρα: Με τον αδελφό μου.

- Βίκυ: Είναι εύκολο, θα την κόψετε στη μέση.
- Εύη: Δείξε μας, σε παρακαλώ, Βίκυ.

Η Βίκυ παίρνει το ψαλίδι και ετοιμάζεται να κόψει βρίσκοντας τη μέση με το μάτι.

- Ντίνος: Δεν είναι εκεί η μέση.
- Εύη: Δείξε μας Ντίνο. Πώς θα βρούμε τη μέση της τούρτας;
- Ντίνος: Θα την διπλώσω, όπως κόβει η μαμά τα χαρτιά για να ζωγραφίσω.

Ο Ντίνος διπλώνει στη μέση και κόβει (σχήμα 6).

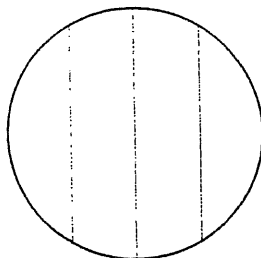


σχήμα 6

- Νηπ.: Είναι ίσα τα κομμάτια;
- Ο Ντίνος τα βάζει το ένα πάνω στο άλλο, τα ταυτίζει και όλοι διαπιστώνουν ότι τα δύο κομμάτια είναι ίσα.
- Αλέξ.: Και δεν περίσσεψε καθόλου!
 - Νηπ.: Δίκαιη η μοιρασιά. Κόπηκε η τούρτα σε δύο ίσα κομμάτια.
 - Αλέξ.: Και δεν περίσσεψε τίποτα.
 - Ντίνος: Αφού είναι δύο, πώς να περισσέψει;
 - Νηπ.: Προσπαθήστε τώρα και εσείς να μοιράσετε την τούρτα σας σε ίσα κομμάτια.

Ομάδα κοριτσιών

Η Φανή διπλώνει την τούρτα στη μέση, κατά μήκος της διαμέτρου, και ξανά στη μέση (σχήμα 7).



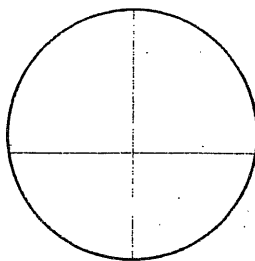
σχήμα 7

- Ντίνος: Όχι έτσι Φανή.
- Νηπ.: Ντίνο, άφησε τη Φανή να σκεφτεί με τα κορίτσια, και εσείς σκεφτήτε για τη δικιά σας τούρτα.
- Ντίνος: Εμείς θα την κόψουμε καλύτερα (και γυρίζει στην ομάδα του).

Η Βίκυ ξεδιπλώνει την τούρτα, κόβει με τη Φανή τα κομμάτια, τα βάζουν το ένα πάνω στο άλλο και διαπιστώνουν ότι δεν είναι ίσα. Την τσαλακώνουν αμέσως και ζητούν μία άλλη, γιατί δεν την έκοψαν καλά.

Ομάδα αγοριών

- Νηπ.: Για ν' ακούσω, τι σκέφτεστε;
- Ο Ντίνος διπλώνει κατευθείαν σε σχήμα σταυρού, απρόσεκτα όμως, γιατί βιάζεται (σχήμα 8).



σχήμα 8

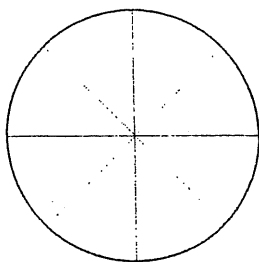
Ο Αλέξανδρος κόβει δύο μισά και δίνει ένα στον Βαγγέλη. Κόβονται τέσσερα κομμάτια.

- Ντίνος: Αυτό είναι, έτσι πρέπει.
- Φανή: Τα δύο κομμάτια είναι πιο μικρά.
- Ντίνος: Δεν διπλώθηκε καλά, γι' αυτό. Έτσι όμως θέλει κόψιμο.

Η νηπιαγωγός παροτρύνει τα παιδιά να κόψουν μία άλλη τούρτα με τον τρόπο του Ντίνου, προσεκτικά όμως, και σε περισσότερα κομμάτια, για να φάνε και οι δύο ομάδες από την ίδια.

- Ντίνος: Θα μας βοηθήσεις κυρία, γιατί το χαρτόνι δεν διπλώνεται καλά.
- Νηπ.: Βεβαίως, αν μου δείχνετε, θα σας βοηθήσω.

Το δίπλωμα έγινε από τα παιδιά και η νηπιαγωγός βοήθησε να γίνει καλά, τσακίζοντας το χαρτόνι. Κάθε φορά το κάθε κομμάτι που έκοβαν, το δίπλωναν στη μέση και μετά το έκοβαν (σχήμα 9).



σχήμα 9

- Νηπ.: Λοιπόν, τι λέτε για το μοίρασμα;
- Βαγγέλης: Όπως η πίτσα που τρώμε στην πιτσαρία.
- Ντίνος: Ναι, είναι όλα τα κομμάτια ίσα.

Τα παιδιά βάζουν όλα τα κομμάτια το ένα πάνω στο άλλο και διαπιστώνουν ότι ταυτίζονται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- G. Brousseau** (1991), Θεμέλια και μέθοδοι της Διδακτικής των Μαθηματικών, στο Α. Γαγάτσης (επιμ.), *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Εκδ. οίκος Α^{90V} Κυριακίδη.
- J. Bruner, J. Goodnow & G. Austin** (1956), *A study of thinking*, New York: Wiley.
- J. Bruner** (1964), The course of cognitive growth, *American Psychologist*, 19, 1-15.
- P. Davis & R. Hersh** (1980), *Η Μαθηματική Εμπειρία* (ελληνική μτφρ. Γ. Αναστασιάδης), Αθήνα: Τροχαλία.
- Α. Δημητρίου** (1993), *Γνωστική Ανάπτυξη: Μοντέλα - Μέθοδοι - Εφαρμογές (τ.1 Πιαζέ και Νεοπιαζετιανοί)*, Θεσσαλονίκη: Art of text.
- Z. Dienes** (1960), *Building up mathematics*, New York: Hutchinson Educational Ltd.
- Z. Dienes** (1963), *An experimental study of mathematics learning*, New York: Hutchinson & Co. Ltd.
- Z. Dienes** (1966), *Mathematics in the primary school*, London: Macmillan.
- Z. Dienes & E. Golding** (1971), *Approach to modern mathematics*, New York: Herder & Herder.
- J. Dossey** (1992), The nature of mathematics: its role and its influence, στο D. Grouws (ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Reston (Virginia): NCTM.
- H. Freudenthal** (1983), *The Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht: Reidel.
- R. Hersh** (1986), Some proposals for reviving the philosophy of mathematics, στο T. Tymoczko (ed.), *News directions in the philosophy of mathematics*, Boston: Birkhauser.
- C. Hoyles & R. Noss** (1986), Scaling a mountain- a study of the use, in LOGO environment, *European Journal of Psychology if Education*, 1(2), 111-126.
- B. Inhelder & J. Piaget** (1964), *The early growth of logical thinking from childhood to adolescence*, London: Routledge & Kegan Paul.
- W. Labov** (1978), *Le parler ordinaire: la langue dans les ghettos noirs des etats-unis*, Paris: Les Editions de Minuit.
- I. Lakatos** (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge: Cambridge University Press

- I. Lakatos** (1978), *Μεθοδολογία των προγραμμάτων επιστημονικής έρευνας* (ελλ. μτφρ. Αιμ. Μεταξοπουλος), Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Σύγχρονα Θέματα, 1986.
- A. Luria** (1978, 3rd ed.), *Γνωστική Ανάπτυξη* (ελλ. μτφρ. Α. Κωσταρίδου-Ευκλείδη), Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα, 1992.
- J. Piaget** (1950), *The psychology of intelligence*, London: Routledge & Kegan Paul.
- J. Piaget, B. Inhelder & A. Sheminska** (1960), *The child's conception of geometry*, London: Routledge & Kegan Paul.
- J. Piaget** (1962), *Play, dreams and imitation in childhood*, New York: W. W. Norton and Co.
- J. Piaget & R. Garcia** (1974), *Understanding causality*, New York: W. W. Norton and Co.
- J. Piaget** (1977), *The development of thought. Equilibration of cognitive structures*, Oxford: Basil Blackwell.
- J. Piaget & A. Sheminska** (1991, 7^{ème} edition), *La genese du nombre chez l' enfant*, Lausanne: Delachaux et Niestle S.A.
- G. Polya** (1947, 2nd edition), *Πώς να το λύσω;* (ελλ. μτφρ. Τ. Πατράνης), Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα, 1991.
- L. Resnick & W. Ford** (1984), *The psychology of mathematics for instruction*, Hillddale N.J.: Laurence Erlbaum Ass. Publ.
- A. Sierpinska** (1991), Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24-36.
- A. Sierpinska** (1992), On understanding the notion of function, in G. Harel & Ed Dubinsky (eds.), *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Mathematical Association of America, MAA Notes, v. 25, 25-58.
- T. Tymoczko** (1986), *News directions in the philosophy of mathematics*, Boston: Birkhauser.
- G. Vergnaud** (1991), La theorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 10(2.3), 133-169.
- L. Vygotsky** (1962, αγγλική έκδοση), *Σκέψη και γλώσσα* (ελλην. μτφρ. Α. Ροδή), Αθήνα: Εκδ. Γνώση, 1988.
- ΥΠΕΠΘ, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο** (1990), *Βιβλίο δραστηριοτήτων για το νηπιαγωγείο, βιβλίο νηπιαγωγού*, Αθήνα: ΟΕΔΒ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή.....	1
Κεφάλαιο Πρώτο	
Μαθηματικά και Εκπαίδευση.....	5
1. Η φύση των Μαθηματικών.....	5
2. Αντιλήψεις για τα Μαθηματικά και Εκπαίδευση.....	13
3. Μαθηματικά και διαδικασίες σκέψης.....	15
4. Μαθηματικές έννοιες.....	30
Κεφάλαιο Δεύτερο	
Θεωρίες Μάθησης και Μαθηματικά.....	35
1. Διδάσκοντας τις μαθηματικές δομές.....	36
2. Ανακαλύπτοντας τη δομή του προβλήματος.....	41
3. Κατασκευάζοντας δομές.....	43
4. Πέρα από τις δομές.....	47
Κεφάλαιο Τρίτο	
Έννοιες της Διδακτικής των Μαθηματικών.....	51
1. Διδακτική Μετάπλαση.....	51
2. Διδακτικό Συμβόλαιο.....	58
3. Διδακτική - Αδιδακτική κατάσταση.....	59
4. Φαινόμενο Toraze.....	61
5. Φαινόμενο Jourdain.....	61
6. Μεταγνωστική ή Μεταδιδακτικό ολίσθημα.....	62
7. Εννοιολογικό πεδίο - παιχνίδι πλαισίων διαλεκτική εργαλείο/αντικείμενο.....	63
Παράρτημα: Θέματα προς μελέτη και διδακτική ανάλυση.....	65
Βιβλιογραφικές αναφορές.....	79