

---

Γιατί Μαθηματικά;

---

Και γιατί Μαθηματικά στο **Νηπιαγωγείο**;

# Γιατί Μαθηματικά;

- Γιατί είναι χρήσιμα στην «καθημερινή ζωή»
  - Αλήθεια;; Τι σημαίνει «καθημερινή ζωή»; Και ποια μαθηματικά είναι χρήσιμα στην «καθημερινή ζωή»;
- Γιατί (μπορεί να) είναι **ένα** πεδίο ανάπτυξης νοητικών ικανοτήτων «υψηλού επιπέδου»
  - Αντιμετώπιση καταστάσεων προβλήματος
- Γιατί είναι ένα σημαντικό **πολιτισμικό** αγαθό

# Σκεφτείτε

- Τίτλος άρθρου εφημερίδας :

**ΣΟΚ!! Ένας στους τέσσερις άνδρες  
μεγαλώνει εν αγνοία του παιδί που δεν είναι  
δικό του!**

➤ Μπορεί κανείς να μείνει στον τίτλο, ή να αναρωτηθεί...

- Μέσα στο κείμενο του άρθρου:

Από τους τέσσερις άντρες που ζητούν τεστ πατρότητας, ο ένας δεν είναι ο βιολογικός πατέρας του παιδιού που μεγαλώνει.

---

## Σκεφτείτε επίσης...

- Θα αισθανόσασταν περήφανοι αν έπρεπε να παραδεχτείτε σε κάποιον ότι δεν έχετε ιδέα ποιος είναι ο Καζαντζάκης ή ο Σέξπιρ;
- ...ο Hilbert? Ο Dedekind? Ο Cantor? Ο Stevin?
- Κι όμως, η συνεισφορά τους έχει συγκρίσιμη πολιτισμική αξία

---

... και γιατί...

**Μαθηματικά στο Νηπιαγωγείο;;**

---

# Διότι...

- Η μαθηματική ανάπτυξη ξεκινά στις μικρές ηλικίες
  - Θα ασχοληθούμε με αυτό εκτενώς!

➤ και

- Η μαθηματική ανάπτυξη απαιτεί χρόνο

# Σκεφτείτε

- Η έννοια της **απόδειξης** είναι πολύ σημαντική στα μαθηματικά.
  - Πίσω από την έννοια της απόδειξης υπάρχουν ιδέες που είναι κεντρικές για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης
    - Ανάγκη για τεκμηρίωση, αναγνώριση του ότι τίποτα δεν είναι αυτονόητο (ή, αναγνώριση του ότι τα πράγματα δεν είναι πάντα όπως φαίνονται), αναγνώριση της ύπαρξης κανόνων στο «παιχνίδι των Μαθηματικών», .....
  - Μπορεί να διδαχθεί η μαθηματική απόδειξη στο Νηπιαγωγείο;
    - Μήπως όμως θα μπορούσαν να μπουν τα θεμέλια που θα επιτρέψουν στο παιδί αργότερα να κατανοήσει το ρόλο της απόδειξης στα Μαθηματικά;
-

# Από το νέο Οδηγό Σπουδών

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### Γιατί ξεκινάμε τη μαθηματική εκπαίδευση από τις μικρές ηλικίες;

Παρά την αναγνωρισμένη σημασία της μαθηματικής εκπαίδευσης και την αναγκαιότητα εισαγωγής της από τις μικρότερες ηλικίες, οι περισσότεροι γονείς και ίσως ακόμα κάποιοι εκπαιδευτικοί έχουν την τάση να πιστεύουν ότι τα μικρά παιδιά δεν μπορούν να έρθουν σε επαφή με σημαντικά μαθηματικά νοήματα.

Οι αντιλήψεις αυτές βαθμιαία αλλάζουν και τα περισσότερα σύγχρονα προγράμματα σπουδών εντάσσουν την προσχολική μαθηματική εκπαίδευση σε ένα πρώτο και ενιαίο κύκλο σπουδών (4-8 χρόνων) στη διάρκεια του οποίου τα παιδιά θεμελιώνουν βασικές μαθηματικές διεργασίες και γνώσεις.

Οι λόγοι που τεκμηριώνουν τη σημασία της ανάπτυξης μιας σοβαρής μαθηματικής εκπαίδευσης από τις μικρότερες ηλικίες είναι πολλοί, με πιο σημαντικούς τους κοινωνικούς, αναπτυξιακούς και διδακτικούς.

Στις μέρες μας αναγνωρίζεται ότι τα παιδιά που είναι σήμερα μαθητές στο νηπιαγωγείο ζουν σε ένα κόσμο με γρήγορες κοινωνικές, επιστημονικές και τεχνολογικές εξελίξεις. Επιπλέον τα παιδιά αυτά θα έρθουν στο μέλλον αντιμέτωπα με μία τελείως διαφορετική πραγματικότητα, γεγονός που

μεταβάλλει τις γνώσεις και τις ικανότητες που τους είναι απαραίτητες για λειτουργήσουν μέσα σε αυτή. Ικανότητες όπως η επίλυση προβλήματος, η επεξεργασία δεδομένων, η ανάλυση και σύνθεση, ο συστηματικός συλλογισμός, οι εκτιμήσεις, οι προβλέψεις και οι γενικεύσεις που αναπτύσσονται και μέσα από μια κατάλληλη μαθηματική εκπαίδευση θεωρούνται κρίσιμες για τους μελλοντικούς πολίτες κι επιδιώκεται να αναπτυχθούν στα περισσότερα σύγχρονα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών.

Έτσι οι κεντρικοί στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν είναι πια η τυπική μάθηση εννοιών και διαδικασιών αλλά η ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης που αξιοποιεί χαρακτηριστικά της μαθηματικής επιστήμης. Η εκπαίδευση αυτή αρχίζει από τις μικρότερες ηλικίες στη διάρκεια των οποίων, παράλληλα με την υπόλοιπη κοινωνική και συναισθηματική ανάπτυξη, μπαίνουν τα θεμέλια και για την νοητική ανάπτυξη του ατόμου και κατά συνέπεια και την καλλιέργεια αυτού του ιδιαίτερου τρόπου σκέψης και δράσης.

Η ιδιαίτερη φύση των Μαθηματικών και η αφηρημένη τους διάσταση απαιτούν μια μακροχρόνια διαδρομή οικοδόμησης των σχετικών εννοιών. Οι υψηλές μαθηματικές διεργασίες και έννοιες δεν μπορούν να δημιουργηθούν στη σκέψη των ανθρώπων ξαφνικά, αντίθετα ακολουθούν μια προοδευτική πορεία δημιουργίας και ανάπτυξης στη διάρκεια της οποίας πλουτίζονται, διευρύνονται και σταθεροποιούνται.



# Από το νέο Οδηγό Σπουδών

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### Γιατί ξεκινάμε τη μαθηματική εκπαίδευση από τις μικρές ηλικίες;

Παρά την αναγνωρισμένη σημασία της μαθηματικής εκπαίδευσης και την αναγκαιότητα εισαγωγής της από τις μικρότερες ηλικίες, οι περισσότεροι γονείς και ίσως ακόμα κάποιοι εκπαιδευτικοί έχουν την τάση να πιστεύουν ότι τα μικρά παιδιά δεν μπορούν να έρθουν σε επαφή με σημαντικά μαθηματικά νοήματα.

Οι αντιλήψεις αυτές βαθμιαία αλλάζουν και τα περισσότερα σύγχρονα προγράμματα σπουδών εντάσσουν την προσχολική μαθηματική εκπαίδευση σε ένα πρώτο και ενιαίο κύκλο σπουδών (4-8 χρόνων) στη διάρκεια του οποίου τα παιδιά θεμελιώνουν βασικές μαθηματικές διεργασίες και γνώσεις.

Οι λόγοι που τεκμηριώνουν τη σημασία της ανάπτυξης μιας σοβαρής μαθηματικής εκπαίδευσης από τις μικρότερες ηλικίες είναι πολλοί, με πιο σημαντικούς τους κοινωνικούς, αναπτυξιακούς και διδακτικούς.

Στις μέρες μας αναγνωρίζεται ότι τα παιδιά που είναι σήμερα μαθητές στο νηπιαγωγείο ζουν σε ένα κόσμο με γρήγορες κοινωνικές, επιστημονικές και τεχνολογικές εξελίξεις. Επιπλέον τα παιδιά αυτά θα έρθουν στο μέλλον αντιμέτωπα με μία τελείως διαφορετική πραγματικότητα, γεγονός που

μεταβάλλει τις γνώσεις και τις ικανότητες που τους είναι απαραίτητες για λειτουργήσουν μέσα σε αυτή. Ικανότητες όπως η επίλυση προβλήματος, η επεξεργασία δεδομένων, η ανάλυση και σύνθεση, ο συστηματικός συλλογισμός, οι εκτιμήσεις, οι προβλέψεις και οι γενικεύσεις που αναπτύσσονται και μέσα από μια κατάλληλη μαθηματική εκπαίδευση θεωρούνται κρίσιμες για τους μελλοντικούς πολίτες κι επιδιώκεται να αναπτυχθούν στα περισσότερα σύγχρονα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών.

Έτσι οι κεντρικοί στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν είναι πια η τυπική μάθηση εννοιών και διαδικασιών αλλά η ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης που αξιοποιεί χαρακτηριστικά της μαθηματικής επιστήμης. Η εκπαίδευση αυτή αρχίζει από τις μικρότερες ηλικίες στη διάρκεια των οποίων, παράλληλα με την υπόλοιπη κοινωνική και συναισθηματική ανάπτυξη, μπαίνουν τα θεμέλια και για την νοητική ανάπτυξη του ατόμου και κατά συνέπεια και την καλλιέργεια αυτού του ιδιαίτερου τρόπου σκέψης και δράσης.

Η ιδιαίτερη φύση των Μαθηματικών και η αφηρημένη τους διάσταση απαιτούν μια μακροχρόνια διαδρομή οικοδόμησης των σχετικών εννοιών. Οι υψηλές μαθηματικές διεργασίες και έννοιες δεν μπορούν να δημιουργηθούν στη σκέψη των ανθρώπων ξαφνικά, αντίθετα ακολουθούν μια προοδευτική πορεία δημιουργίας και ανάπτυξης στη διάρκεια της οποίας πλουτίζονται, διευρύνονται και σταθεροποιούνται.

Έτσι η ολοκληρωμένη ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών κάνει απαραίτητη την θεμελίωση από τις μικρότερες ηλικίες και τη βαθμιαία προσέγγιση τους με συστηματικές εμπειρίες και δράσεις.

Αν η εκπαίδευση επιδιώκει να προσφέρει στους μαθητές μαθηματική γνώση με νόημα και να τους υποστηρίξει ώστε να αποκτήσουν ένα σημαντικό μαθηματικό υπόβαθρο, θα χρειαστεί να δημιουργήσει μια πορεία ανάπτυξης των εννοιών και διαδικασιών από τα μικρότερα χρόνια και το νέο πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά υποστηρίζει μια τέτοια οργάνωση.

## Ποια είναι η δομή και η οργάνωση του προγράμματος για τα Μαθηματικά στο νηπιαγωγείο;

Στη βάση της τεκμηρίωσης αυτής το πρόγραμμα των Μαθηματικών για την προσχολική ηλικία περιλαμβάνει όλους τους άξονες μαθηματικών εννοιών και διεργασιών που σχεδιάστηκαν για την ενιαία μαθηματική εκπαίδευση. Στην ηλικία αυτή εκκινούν οι διαδρομές ανάπτυξης των εννοιών που θα συνεχιστούν στις επόμενες ηλικίες και θα ολοκληρωθούν στο τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και το Λύκειο.

Η οργάνωση του προγράμματος των Μαθηματικών για τη δεκάχρονη υποχρεωτική εκπαίδευση στηρίχθηκε στη λογική των **‘τροχιών’** ανάπτυξης εννοιών και διεργασιών οι οποίες οργανώνουν την πορεία που θα ακολουθήσει η μαθησιακή

εμπειρία των παιδιών και ερμηνεύουν την αντίστοιχη διδακτική προετοιμασία που είναι απαραίτητη. Θεωρείται ότι η οργάνωση αυτή, η οποία βοηθάει στο ξεπέραςμα των παλιών αντιλήψεων της κατάτμησης των επιδιωκόμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων κατά ηλικία, επιτρέπει τη δημιουργία ενός συνεχούς στην ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών και υποστηρίζει τη βαθμιαία οικοδόμηση τους στην αντίληψη των μαθητών σύμφωνα με τις εποικοδομητικές αντιλήψεις για τη διδασκαλία και μάθηση.

Οι **πέντε άξονες** με τις τροχιές που αναπτύσσονται στο πρόγραμμα των Μαθηματικών και αφορούν την προσχολική ηλικία είναι:

- **Αριθμοί και πράξεις:** Φυσικοί αριθμοί ως το 10 και πράξεις
- **Χώρος και Γεωμετρία:** Προσανατολισμός στο χώρο, γεωμετρικά σχήματα, μετασχηματισμοί και οπτικοποίηση
- **Εισαγωγή στην Αλγεβρική σκέψη:** Κανονικότητες και ισότητες
- **Μετρήσεις:** Εισαγωγή στη μέτρηση μήκους, επιφάνειας, όγκου και χωρητικότητας
- **Στοχαστικά Μαθηματικά:** Οργάνωση δεδομένων και εισαγωγή στην πιθανότητα

Αποσαφηνίζεται ότι τα περισσότερα από τα στοιχεία αυτά τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας δεν τα «διδάσκονται», ούτε

---

Αποσαφηνίζεται ότι τα περισσότερα από τα στοιχεία αυτά τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας δεν τα «διδάσκονται», ούτε τα «μαθαίνουν» με την παραδοσιακή έννοια των όρων. Απλά μέσα από ατομική αναζήτηση ή παιγνιώδεις διαδικασίες σε ένα σύνολο δράσεων και περιβαλλόντων κάνουν μια αρχική γνωριμία και έχουν μια πρώτη εμπειρία μαζί τους.

---

---

Εμείς μπορεί να θέλουμε...

**...τα παιδιά μπορούν;**

---

---

Τι μαθηματικά μπορούν να  
προσεγγίσουν τα μικρά παιδιά;

Παλιότερες και πιο σύγχρονες απόψεις

---

---

# Jean Piaget (1896 - 1980)



---

# Τον Piaget...

- ... ΤΟΝ έΧΕΤΕ ΣΥΝΑΝΤΗΣΕΙ ΗΔΗ ΣΕ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ
  - ...ΓΝΩΡΙΖΕΤΕ ΟΤΙ ΕΙΝΑΙ ΈΝΑ ΠΡΟΣΩΠΟ-ΚΛΕΙΔΙ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΗΣ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ
  - ...ΈΧΕΙ ΣΥΝΕΙΣΦΕΡΕΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΙΔΕΕΣ
-

---

# Κεντρικές Πιαζετιανές ιδέες

- Η μάθηση προϋποθέτει **ενεργό συμμετοχή** του ατόμου
    - Το παιδί μαθαίνει δρώντας και αλληλεπιδρώντας με το περιβάλλον του
  - Η σκέψη του παιδιού χαρακτηρίζεται από **ποιοτικές διαφορές** σε σχέση με τη σκέψη των ενηλίκων
  - Υπάρχουν στάδια ανάπτυξης της σκέψης
-



# Τα στάδια της ανάπτυξης της σκέψης κατά Piaget (I)

- Αισθησιοκινητικό (γέννηση – 2 ετών)
  - Διαφοροποιεί τον εαυτό του από τους άλλους
  - Αναγνωρίζει τον εαυτό του ως δράστη της ενέργειας και αρχίζει να ενεργεί σκόπιμα
  - Επιτυγχάνει τη μονιμότητα του αντικειμένου
- Προεγνοιολογικής ή προσυλλογιστικής σκέψης (2-7)
  - Μαθαίνει να χρησιμοποιεί τη γλώσσα και να αναπαριστά τα αντικείμενα με εικόνες και λέξεις.
  - Η σκέψη του είναι ακόμα εγωκεντρική: δε λαμβάνει υπόψη την οπτική των άλλων
  - Κατηγοριοποιεί αντικείμενα βάσει ενός χαρακτηριστικού (π.χ., μόνο το χρώμα ή το σχήμα)

# Τα στάδια της ανάπτυξης της σκέψης κατά Piaget (II)

- Συγκεκριμένων λογικών ενεργειών (7-12)
  - Μπορεί να σκέφτεται λογικά για συγκεκριμένα αντικείμενα και γεγονότα.
  - Επιτυγχάνει τη διατήρηση του αριθμού\* , της μάζας και του όγκου
  - Κατηγοριοποιεί τα αντικείμενα με βάση περισσότερα του ενός χαρακτηριστικά
- Τυπικών λογικών ενεργειών (12 και άνω)
  - Μπορεί να σκέφτεται λογικά για αφηρημένες έννοιες και να ελέγχει τις υποθέσεις συστηματικά.
  - Αρχίζει να ενδιαφέρεται για υποθετικά, μελλοντικά και ιδεολογικά προβλήματα.

---

\* Πιο σωστά, του πλήθους

# Εγωκεντρισμός

Ε: Έχεις αδελφό;

Π: Ναι, έχω.

Ε: Πως τον λένε;

Π: Γιώργο

Ε: Ο Γιώργος έχει αδελφό;

Π: Όχι, δεν έχει αδελφό. Εγώ έχω.

Έργα διατήρησης:  
Τι μεταβάλλεται;  
Τι μένει σταθερό;

Φάση 1



«Είναι ο ίδιος αριθμός ή διαφορετικός αριθμός;»

Φάση 2



«Κοίταξε τώρα τι κάνω»  
(αραίωμα)

Φάση 3



«Είναι ο ίδιος αριθμός ή διαφορετικός αριθμός;»



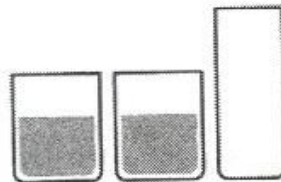
«Έχουν την ίδια ποσότητα πλαστελίνης ή διαφορετική ποσότητα;»



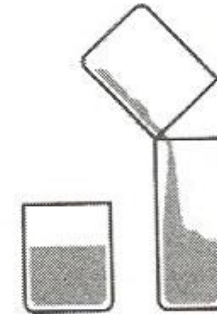
«Κοίταξε τώρα τι κάνω» (τέντωμα της πλαστελίνης)



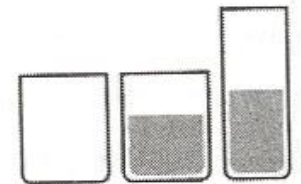
«Έχουν την ίδια ποσότητα πλαστελίνης ή διαφορετική ποσότητα;»



«Έχουν την ίδια ποσότητα νερού ή διαφορετική ποσότητα;»



«Κοίταξε τώρα τι κάνω» (άδειασμα)



«Έχουν την ίδια ποσότητα νερού ή διαφορετική ποσότητα;»

# Έργα διατήρησης του αριθμού

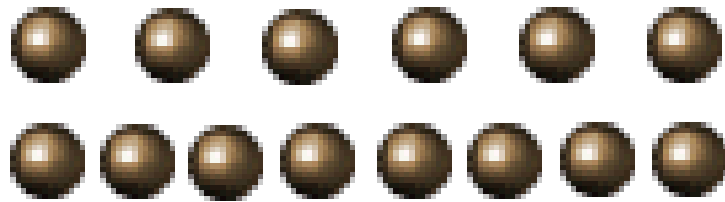
- Βάζουμε σε σειρά ένα πλήθος από ίδια αντικείμενα (π.χ. κουμπιά) σε ίσα διαστήματα μεταξύ τους.
- Ζητάμε από το παιδί να πάρει τόσα κουμπιά όσα και αυτά του μοντέλου και να τα τοποθετήσει κάτω από αυτά του μοντέλου. Αν το κατορθώσει το ρωτάμε αν είναι περισσότερα τα κουμπιά στην πάνω σειρά, ή την κάτω σειρά.
- Στη συνέχεια αραιώνουμε ή πυκνώνουμε τα στοιχεία του μοντέλου και ρωτάμε το παιδί αν είναι περισσότερα τα κουμπιά στην πάνω σειρά ή στην κάτω σειρά.
- Τέλος ζητάμε από το παιδί να ξαναφτιάξει τις δύο σειρές ώστε να είναι ίδιες.

---

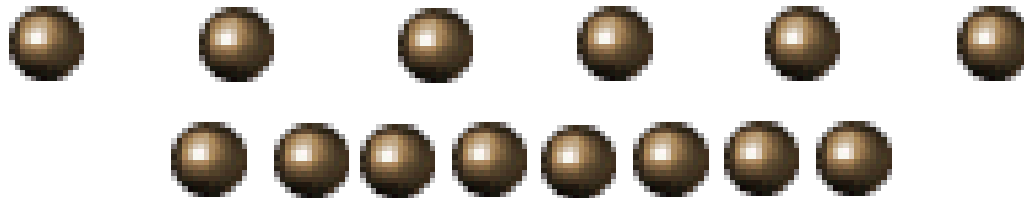
# Ο Piaget...

- ...έδωσε αυτό το έργο σε παιδιά 4-7 χρονών.
  - Σύμφωνα με τα ευρήματά του, τα παιδιά 6-7 χρόνων επιτύγχαναν στο έργο, ενώ τα μικρότερα παιδιά όχι.
-

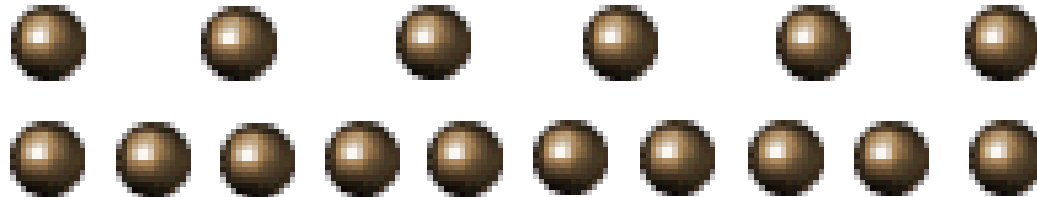
# Αποτυχία στο έργο (I)



(α)



(β)

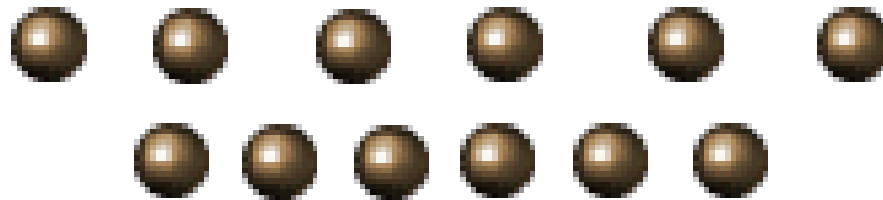


(γ)

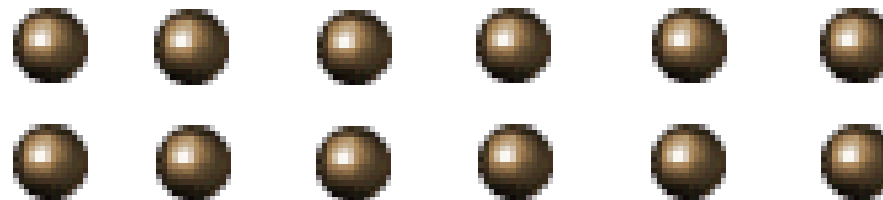
# Αποτυχία στο έργο (II)



(α)



(β)



(γ)



# Τα ευρήματα και η ερμηνεία του Piaget

- Τα παιδιά, μέχρι κάποια ηλικία, δεν κατανοούν ότι
    - Το μήκος και η πυκνότητα της σειράς (συμ)μεταβάλλονται, αλλά το πλήθος των αντικειμένων δεν αλλάζει
    - Η 1-1 αντιστοίχιση εξασφαλίζει την ισότητα του πλήθους
      - Όταν η αντιστοίχιση δεν είναι άμεσα αντιληπτή, τότε η ισότητα απορρίπτεται
  - Αυτό είναι χαρακτηριστικό του **σταδίου** στο οποίο βρίσκονται
    - Δεν έχουν την ικανότητα λογικής σκέψης που απαιτείται για την κατάκτηση της διατήρησης του αριθμού.
-

---

## Κατά τον Piaget ...

- τα 4 στάδια είναι «αναπόφευκτα», με την έννοια ότι όλοι περνούν από αυτά και δεν είναι δυνατόν κάποιος από αυτά να υπερπηδηθεί ή να αλλάξει σειρά
  - υπάρχουν διακυμάνσεις στην ηλικία που κάποιος φτάνει ή αφήνει ένα στάδιο
-

---

# Ο Piaget και η μάθηση

- Η μάθηση προϋποθέτει ενεργό συμμετοχή του ατόμου
    - Το παιδί μαθαίνει δρώντας και αλληλεπιδρώντας με το περιβάλλον του
  - Το τι μπορεί να μάθει ένα άτομο εξαρτάται από το συγκεκριμένο στάδιο ανάπτυξης της σκέψης στο οποίο βρίσκεται
    - Η επίδραση της διδασκαλίας είναι μηδαμινή, όταν ο στόχος της διδασκαλίας ξεφεύγει από το «ρεπερτόριο» του δεδομένου σταδίου στο οποίο βρίσκεται στο παιδί.
-

---

# Κριτικές στον Piaget I

- Το έργο διατήρησης του Piaget ενδεχομένως απαιτεί περισσότερα από τη «διατήρηση του αριθμού»
    - Καταλαβαίνουν τα παιδιά την ερώτηση; Πώς ερμηνεύεται η λέξη «ίδιο»;
    - Τα παιδιά παρακολουθούν τον ερευνητή να αλλάζει κάτι. Μήπως αυτό τα οδηγεί στο να απαντήσουν θετικά στην ερώτηση;
-

# Τα πειράματα της Gelman I

- Το ζητούμενο: Να αναπτυχθεί μια δοκιμασία η οποία:
  - Να ελαχιστοποιεί το πρόβλημα της εκτίμησης που δίνεται στο παιδί (λιγότερα αντικείμενα)
  - Να ελέγχει τη χρήση λέξεων όπως «ίδιο», «περισσότερο» ή «λιγότερο»
  - Να ελαττώνει την πιθανότητα να παρακολουθεί το παιδί άσχετες ενδείξεις (οι κινήσεις του ερευνητή)

# Τα πειράματα της Gelman II

- Υλικά
  - 6 ποντικάκια (ψεύτικα!)
  - 2 άσπρα πιάτα
  - 2 κουτιά για να σκεπάζονται τα πιάτα
- Διαδικασία
  - Στο ένα πιάτο 2 ποντικάκια, στο άλλο 3 σε σειρά
  - Η ερευνήτρια ξεσκεπάζει τα δύο κουτιά.
  - Προσδιορίζει το πιάτο με τα 3 ποντικάκια ως αυτό που ‘κερδίζει’ και το πιάτο με τα 2 ποντικάκια ως αυτό που χάνει χωρίς να αναφέρει τίποτα για τις επιμέρους διαφορές που παρουσιάζουν τα πιάτα.
  - Οδηγία:
    - “Όταν βρίσκεις ΑΥΤΟ το πιάτο (με τα 3 ποντικάκια) τότε θα κερδίζεις ένα δώρο’
    - Ανακατεύει τα πιάτα. Ζητάει από το παιδί να πει που πιστεύει ότι βρίσκεται το πιάτο που κερδίζει. Ξεσκεπάζει. ‘Είναι αυτό το πιάτο που κερδίζει;’
    - ΝΑΙ! Πάρε το δώρο σου.... ΟΧΙ; Η ερευνήτρια ξεσκεπάζει το άλλο. ‘Είναι αυτό το πιάτο που κερδίζει;’ ΝΑΙ! Πάρε το δώρο σου....

# Τα πειράματα της Gelman III

- Τρεις Φάσεις
  - Φάση 1: Εξοικείωση-Γνωριμία
  - Φάση 2 : Προσδιορισμός του πιάτου που κερδίζει
  - Φάση 3 : Αλλαγές στα πιάτα (χωρίς να βλέπει το παιδί)
    - Πρόσθεση ή Αφαίρεση 1 παιχνιδιού στο πιάτο
    - Μετακίνηση (αλλαγή της θέσης, πύκνωση-αραίωση)
- Συμμετείχαν
  - 96 παιδιά χωρισμένα σε 3 ισοπληθείς ομάδες με μέσο όρο ηλικιών αντίστοιχα, 3, 4 και 5 έτη.

# Αποτελέσματα

- Τα παιδιά σχεδόν πάντα εύρισκαν το πιάτο «που κερδίζει»
- Εκπλήσσονταν όταν άλλαζε το πλήθος των παιχνιδιών (πρόσθεση-αφαίρεση) αλλά όχι όταν άλλαζε η θέση τους (μετατόπιση)
- Πολλά μπορούσαν να εξηγήσουν τι πρέπει να γίνει για να μετατραπεί το πιάτο σε «πιάτο που κερδίζει»
  - Είτε λεκτικά, είτε με πράξη
- Παρόμοιες επιδόσεις ανά ηλικιακή ομάδα (3, 4, 5 ετών)



# Συμπέρασμα (της Gelman)

*The experimental paradigm employed above yields clear evidence that, for **small numbers**, children **as young as 3 years old** possess a concept of number that is **independent of the irrelevant dimensions** of length and density.*

*Furthermore, **they possess a logic** that treats the **cardinal number of a set as invariant under spatial displacement of its elements**. The logic requires that subtraction or addition operations intervene if the cardinal number of a set decreases or increases and appears to recognize that addition operations reverse subtraction operations and vice versa.*

*These conclusions are **at variance** with the conclusions drawn from numerous experiments employing **the Piagetian conservation** paradigm.*

# Συμπέρασμα (της Gelman)

Το πειραματικό παράδειγμα έδωσε αποτελέσματα που δείχνουν καθαρά ότι, για **μικρούς αριθμούς**, παιδιά **ήδη από την ηλικία των τριών ετών** διαθέτουν μια έννοια του αριθμού που είναι ανεξάρτητη από τις άσχετες διαστάσεις του μήκους και της πυκνότητας.

Επιπλέον, διαθέτουν μια **λογική** σύμφωνα με την οποία ο πληθικός αριθμός ενός συνόλου παραμένει αμετάβλητος όταν αλλάζει η θέση των στοιχείων του στο χώρο. Σύμφωνα με αυτή τη **λογική**, για να μειωθεί ή να αυξηθεί ο πληθικός αριθμός ενός συνόλου, πρέπει να εμπλέκονται η αφαίρεση ή η πρόσθεση –επιπλέον, με βάση αυτή τη **λογική** τα παιδιά φαίνεται να αναγνωρίζουν ότι η πράξη της πρόσθεσης αντιστρέφει την πράξη της αφαίρεσης (και αντίστροφα).

Αυτά τα συμπεράσματα **δε συνάδουν** με τα συμπεράσματα που προκύπτουν από πλήθος πειραμάτων που χρησιμοποιούν το Πιαζετιανό πειραματικό παράδειγμα της διατήρησης.

# Αυτό δε σημαίνει...

- ... ότι τα παιδιά αυτής της ηλικίας που επιτυγχάνουν στο έργο της Gelman, επιτυγχάνουν και στο έργο του Piaget, ακόμα και αν τα αντικείμενα είναι 2-3.
  - Το έργο του Piaget απαιτεί περισσότερα
    - Γλώσσα
    - Ικανότητα αγνόησης των άσχετων ενδείξεων (συμπεριφορά του ερευνητή)

# Σύμφωνα με τον Piaget...

- ...η ικανότητα της σκέψης και οι μηχανισμοί της είναι ανεξάρτητοι από το περιεχόμενο της σκέψης
  - Κάπως απλοϊκά, αυτό σημαίνει ότι αν έχεις αναπτύξει ικανότητες λογικής σκέψης, τότε μπορείς να «σκεφτείς λογικά» τόσο για τους αριθμούς, όσο και για τα έμβια όντα. Αν όχι, τότε δεν μπορείς να «σκεφτείς λογικά» ούτε για το ένα, ούτε για το άλλο.

---

# Ωστόσο...

- ...υπάρχουν κάποια πεδία στα οποία τα παιδιά μαθαίνουν εξαιρετικά γρήγορα και αποτελεσματικά στα πρώτα χρόνια της ζωής τους
  - Μπορείτε να σκεφτείτε ένα τέτοιο πεδίο;
    - Η γλώσσα!!
-

# Σήμερα...

- ...ερευνάται (και) η ανάπτυξη της *εξειδικευμένης κατά πεδίο* (domain-specific) γνώσης
  - Σε πεδία όπως
    - Μαθηματικά
    - Γλώσσα
    - Φυσικές Επιστήμες (Φυσική, βιολογία)
      - Π.χ. Πότε και πώς ξεχωρίζουν τα παιδιά τα έμβια από τα άβια όντα;
    - Ψυχολογία
      - Πότε αντιλαμβάνονται τα παιδιά ότι οι άλλοι άνθρωποι έχουν επιθυμίες και προθέσεις;
-

---

# Ανάπτυξη της ειδικής-κατά- πεδίο γνώσης του αριθμού

---

Έρευνα σε όλο και μικρότερες ηλικίες

# Τα βρέφη...

- ... μπορούν να διακρίνουν μεταξύ συνόλων με διαφορετικό πλήθος στοιχείων
  - Μεγάλα σύνολα που διαφέρουν πολύ μεταξύ τους ως προς το πλήθος των στοιχείων
  - Μικρά σύνολα που διαφέρουν κατά ένα
- Η ικανότητα αυτή είναι παρούσα από τη γέννηση, και ανιχνεύεται υπό ποικίλες πειραματικές συνθήκες
  - Σύνολα με ετερογενή αντικείμενα
  - Σύνολα με αντικείμενα που ποικίλλουν σε μέγεθος και είδος
  - Σύνολα με αντικείμενα που κινούνται
  - Χρονικές ακολουθίες γεγονότων



# Πώς είναι δυνατή η έρευνα στα βρέφη;

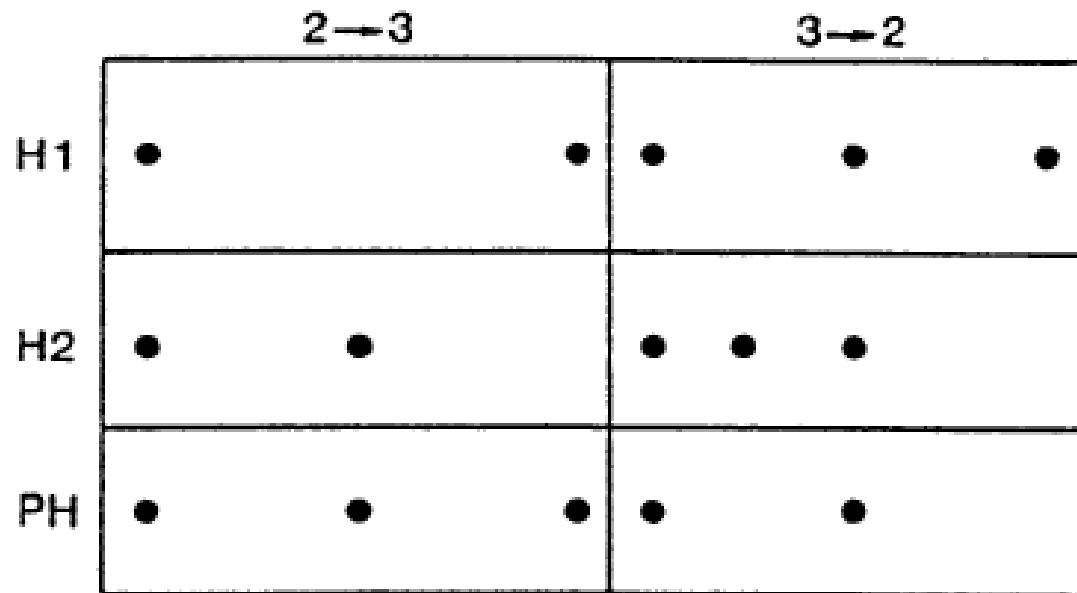


FIGURE 2.1 Representation of the stimuli used by Starkey and Cooper (1980). The labels H1 and H2 indicate habituation arrays and PH indicates the posthabituation arrays. Reprinted with permission from Starkey, P., and Cooper, R. G., Jr. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, 210, 1033–1035. Copyright 1980 American Association for the Advancement of Science.

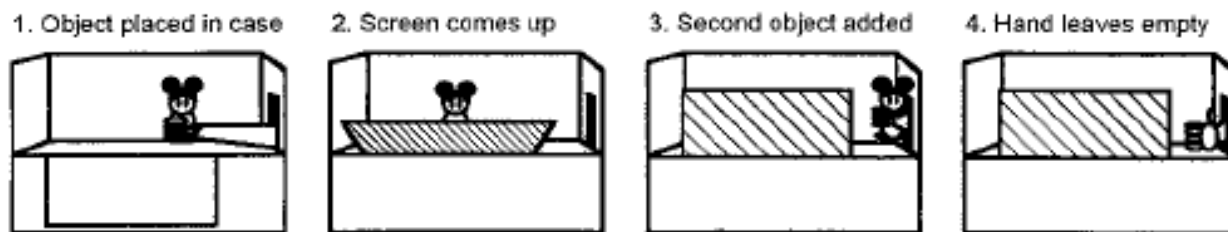
# Πώς είναι δυνατή η έρευνα στα βρέφη;

- Το φαινόμενο της «εξοικείωσης» (habituation) στην έρευνα με βρέφη
  - Τα βρέφη εστιάζουν το βλέμμα τους περισσότερο χρόνο σε ερεθίσματα που θεωρούν «ενδιαφέροντα»/ καινοφανή
  - Όταν τα βρέφη εκτίθενται κατ'επανάληψη σε ερεθίσματα που αντιλαμβάνονται ως «ίδια» ως προς κάποια παράμετρο, μειώνεται η διάρκεια εστίασης του βλέμματος
  - Όταν μετά τη φάση εξοικείωσης παρουσιάζεται ένα ερέθισμα που γίνεται αντιληπτό ως διαφορετικό από τα προηγούμενα, τότε αυξάνεται η διάρκεια εστίασης του βλέμματος
  - Άρα, αν τα βρέφη έχουν εξοικειωθεί σε ερεθίσματα με π.χ. 2 αντικείμενα και υπάρξει διαφορά όταν παρουσιαστεί ένα ερέθισμα με 3 αντικείμενα, τότε μπορεί να ερμηνευθεί ως ένδειξη ότι το αντιλαμβάνονται ως διαφορετικό

# Τα βρέφη...

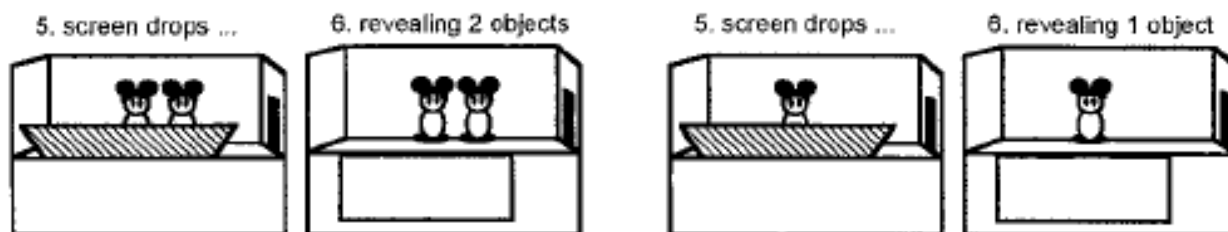
- εκπλήσσονται όταν παραβιάζονται οι προσδοκίες τους για την έκβαση μιας «πράξης» πρόσθεσης ή αφαίρεσης
  - Μεγαλύτερη διάρκεια εστίασης βλέμματος στην «απροσδόκητη» έκβαση

Sequence of events:  $1+1 = 1$  or  $2$

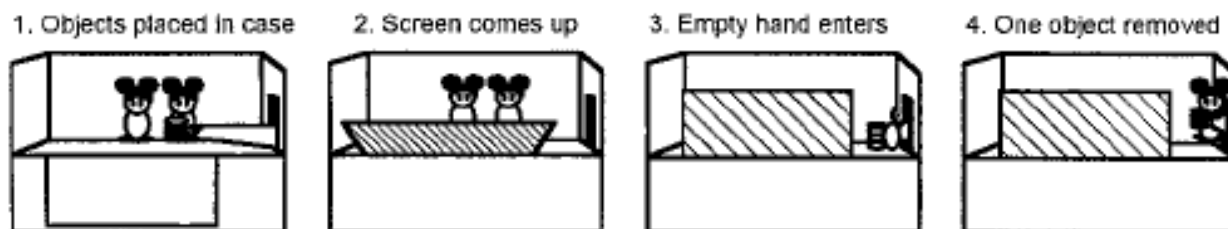


Then either: (a) Possible Outcome

Or (b) Impossible Outcome



Sequence of events:  $2-1 = 1$  or  $2$



Then either: (a) Possible Outcome

Or (b) Impossible Outcome

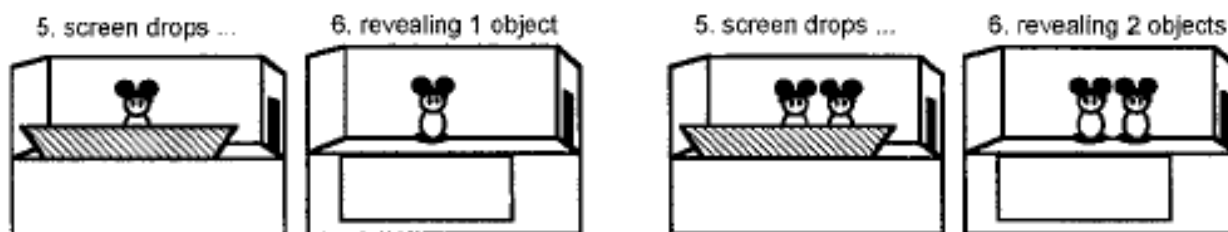


FIGURE 2.3 Sequence of events used in Wynn's (1992) addition condition. Reprinted with permission from Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358, 749-50. Copyright 1992 *Nature*. Reprinted with

# Όχι μόνο διακριτές, αλλά και...

- ...συνεχείς ποσότητες
  - Βρέφη 5 μηνών διακρίνουν ανάμεσα σε ένα δοχείο γεμάτο κατά ένα συγκεκριμένο μέρος (π.χ. κατά το  $\frac{1}{4}$  ή κατά τα  $\frac{3}{4}$ ), και σε ένα άλλο δοχείο γεμάτα κατά ένα άλλο μέρος.
    - Φυσικά, το μέγεθος της διαφοράς έχει σημασία!

# Δεδομένα και υποθέσεις...

- Δεδομένο: Τα βρέφη εστιάζουν στην ποσότητα και τις μεταβολές της
- Υποθέσεις
  - Κάποιο ερευνητές ισχυρίζονται ότι υπάρχει μια (βιολογική) προδιάθεση για την εστίαση σε **διακριτές** ποσότητες (πλήθος, μεταβολές)
  - Η βιολογία πριμοδοτεί τους φυσικούς αριθμούς
  - Άλλοι ερευνητές διαφωνούν με τη διάκριση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων και ισχυρίζονται ότι τα βρέφη, ακόμα και για τις διακριτές ποσότητες, «εκτιμούν» τη μεταβολή συνυπολογίζοντας και άλλα μεγέθη
    - Π.χ. τη συνολική επιφάνεια που καταλαμβάνουν οι κουκκίδες των ερεθισμάτων
  - Η βιολογία δεν πριμοδοτεί τους φυσικούς αριθμούς

---

... και η «καυτή πατάτα» για την έρευνα

- Τι αναπαριστούν τα βρέφη;
    - Τον αριθμό (με ακρίβεια)
    - ή
    - την ποσότητα (κατά προσέγγιση);
-

# Προσχολική ηλικία – διακριτές ποσότητες

- Γύρω στα 2 ½ και μέχρι τα 4 ½ αναπτύσσεται μια ποικιλία ικανοτήτων που συνδέονται με την έννοια του αριθμού. Τα νήπια
  - Κρίνουν κατά πόσο δύο σύνολα είναι ισοδύναμα ως προς την πληθικότητα
  - Κρίνουν ποιο σύνολο έχει περισσότερα στοιχεία
  - Αναπτύσσουν απλές στρατηγικές υπολογισμού
- Τρεις σημαντικές αναπτυξιακές αλλαγές
  - Οι ορθές απαντήσεις και η ακρίβεια αυξάνονται
  - Το μέγεθος των συνόλων αντικειμένων που μπορούν να διαχειριστούν αυξάνεται
    - Τα 3 αντικείμενα είναι ένα σημαντικό πλήθος
  - Το επίπεδο αφαίρεσης αυξάνεται
    - Π.χ. μπορούν να κρίνουν ως ισοδύναμα δύο σύνολα διαφορετικών αντικειμένων, όπως άσπρους δίσκους και μαύρες κουκκίδες



## Προσχολική ηλικία –μη διακριτές ποσότητες

- Παιδιά 4 χρονών καταφέρνουν να αντιμετωπίσουν το ακόλουθο έργο (παρουσιασμένο σχηματικά):  
Αν  $\frac{1}{2}$  ενός κυκλικού δίσκου ταιριάζει με το  $\frac{1}{2}$  ενός ορθογωνίου, τότε το  $\frac{1}{4}$  του δίσκου ταιριάζει με το ... του ορθογωνίου
- Παιδιά  $3 \frac{1}{2}$  και 4 χρονών, αν τους δοθεί ένας απλός μονοδιάστατος χάρτης (μια γραμμή με μια κουκκίδα να σημαίνει ένα σημείο), μπορούν να εντοπίσουν το σημείο σε ένα (στενόμακρο) δοχείο με άμμο με μεγαλύτερο μήκος
- .....

# Συμπερασματικά...

- Πριν ακόμα εκτεθούν σε συστηματική εκπαίδευση (και σε συμβολικά συστήματα), τα μικρά παιδιά έχουν ένα ρεπερτόριο ικανοτήτων «ποσοτικοποίησης» που σχετίζονται με την έννοια του αριθμού
  - και δεν περιορίζονται στις διακριτές ποσότητες
- Τα μικρά παιδιά φαίνονται ικανά για περισσότερα πράγματα, απ' όσο πιστεύαμε μέχρι πρόσφατα
  - Και οπωσδήποτε, ξεπερνούν τις προσδοκίες του Piaget

---

Πριν προχωρήσουμε...

...λίγη ορολογία για να συνεννοούμαστε  
σε αυτό και σε επόμενα μαθήματα

---

# Ορολογία

- Αριθμητική ακολουθία
    - Απαγγελία των «αριθμολέξεων»
  - Απαρίθμηση
    - Απαγγελία των «αριθμολέξεων» και 1-1 αντιστοίχιση με τα αντικείμενα μιας συλλογής
  - Καταμέτρηση
    - Σύνδεση της απαρίθμησης με την πληθικότητα
  - Μέτρηση
    - Το πλήθος των μονάδων (ή, το «πόσες φορές χωράει» η μονάδα) σε ένα συνεχές μέγεθος
  - Διάταξη
    - Σχετική θέση, σχετικό μέγεθος
-

# Η απόσταση ανάμεσα στην άτυπη, «διαισθητική» κατανόηση για την ποσότητα...

- ... και την κατανόηση των συμβολικών συστημάτων
    - Το πιο «απλό» συμβολικό σύστημα για τους (φυσικούς) αριθμούς είναι οι αριθμολέξεις (ένα, δύο, τρία, ....)
    - Ένα παιδί, για να ξέρει να καταμετρά πρέπει
      - να χρησιμοποιεί τις αριθμολέξεις με σταθερή σειρά
      - να αντιστοιχεί 1-1 ένα αντικείμενο με μια αριθμολέξη
      - να κατανοήσει ότι η τελευταία αριθμολέξη εκφράζει το συνολικό πλήθος των αντικειμένων
      - να αναγνωρίζει ότι η σειρά με την οποία απαριθμούνται τα αντικείμενα δεν έχει σημασία
  - Τα παιδιά μαθαίνουν να καταμετρούν ανάμεσα στα 2 και 4 χρόνια και τους παίρνει 1 – 1 ½ χρόνο για να κατακτήσουν αυτές τις αρχές
  - Υπάρχουν ενδιάμεσες καταστάσεις, στις οποίες ένα παιδί μπορεί να έχει κατακτήσει τις αρχές π.χ. μέχρι το 2, αλλά όχι παραπάνω.
-

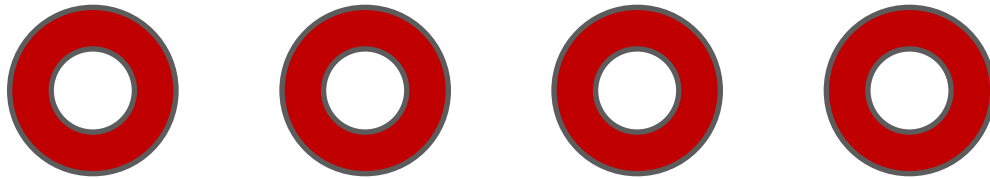
# Αιόμα και η κατασκευή της ακολουθίας των αριθμολέξεων δε γίνεται άμεσα

## ■ Επίπεδα

- 1° : Απαγγελία των αριθμολέξεων (π.χ. 1-20), ξεκινώντας πάντα από το ένα. Δοθείσης μιας αριθμολέξης, δεν υπάρχει η δυνατότητα εύρεσης της επόμενης.
- 2° : Δυνατότητα εύρεσης της επόμενης αριθμολέξης, ξεκινώντας πάλι από το ένα (1-10).
- 3° : Άμεση εύρεση της επόμενης αριθμολέξης (1-10)
- Επόμενα επίπεδα :Επέκταση της δυνατότητας αυτής σε μεγαλύτερο εύρος αριθμών / απαγγελία σε ευθεία ή αντίστροφη σειρά/ αξιοποίηση της ακολουθίας των αριθμολέξεων σε προβλήματα πρόσθεσης ή αφαίρεσης

(Καφούση & Σκουμπουδή, 2007)

# Απαρίθμηση έναντι Καταμέτρησης



- Νηπιαγωγός: «Πόσα είναι;»
- Παιδί: «Ένα δύο, τρία, τέσσερα»
- Νηπιαγωγός: «Πόσα είναι;;»
- Παιδί: «Ένα, δύο, τρία, τέσσερα»

# Στο Νηπιαγωγείο

- Τα περισσότερα παιδιά γνωρίζουν **τουλάχιστον** τα 10 πρώτα στοιχεία της αριθμητικής ακολουθίας
  - **Όχι όλα** τα παιδιά!
- Οφείλουμε να το ελέγξουμε και να υποστηρίξουμε όλα τα παιδιά στην αναπαραγωγή της αριθμητικής ακολουθίας
  - Ωστόσο, δεν ξεχνάμε ότι η απαγγελία των «αριθμολέξεων» μπορεί να γίνεται μηχανικά
    - Σαν ποίημα!



---

# Πιαζετινές και μη-Πιαζετιανές επιρροές στην πρώιμη εκπαίδευση

Η περίπτωση των αριθμών

---

---

# Η «πιαζετιανή» προσέγγιση

- Λέξη-κλειδί: Προαριθμητικές έννοιες
    - Ομαδοποίηση
    - Σειροθέτηση
    - Διατήρηση της ποσότητας
    - 1-1 αντιστοίχιση
      - για τη σύγκριση του πλήθους
  - Εκκίνηση με τον **πληθικό** χαρακτήρα του αριθμού
-

---

# Η «αντι-πιαζετιανή» προσέγγιση

- Λέξεις-κλειδιά
    - Αριθμητική ακολουθία
    - Καταμέτρηση
  - Εκκίνηση με τον **τακτικό** χαρακτήρα του αριθμού
-

---

Και τελικά...

... τι ακολουθούμε, «πιαζετιανή» ή  
«αντι-πιαζετιανή» προσέγγιση;

---

# Λάβετε υπόψη ότι...

- ... τόσο ο πληθικός, όσο και ο τακτικός χαρακτήρας του αριθμού είναι σημαντικός για την κατανόηση της έννοιας του αριθμού
- Χρειαζόμαστε μια **σύνθεση** των δύο προσεγγίσεων
  - Από πού ξεκινάμε;
    - Στο απερχόμενο Αναλυτικό, από την «πιαζετιανή» προσέγγιση
    - Στο νέο, από την «αντι-πιαζετιανή»

---

Περισσότερα + Δραστηριότητες στο μάθημα....

**... Διδακτική των Μαθηματικών II**

---

---

## Ένα σημαντικό ερώτημα...

... που θα παραπέμπει σε έναν άλλο σημαντικό ψυχολόγο που γνωρίζετε και θα συναντήσουμε σύντομα

---

# Γιατί τελικά έρχονται τα παιδιά στο Νηπιαγωγείο...

- ... με περισσότερες «γνώσεις» για τους φυσικούς αριθμούς, παρά π.χ για τα κλάσματα
  - ▣ ακόμα και αν δεχτούμε ότι η «βιολογία δεν πριμοδοτεί τους φυσικούς αριθμούς»;
- Τους πριμοδοτεί το κοινωνικο-πολιτισμικό (μας) περιβάλλον
  - Γλώσσα – αριθμολέξεις
  - Τα δάχτυλα ως εργαλείο για την απαρίθμηση
  - Παιχνίδια μεταξύ ενηλίκων και παιδιών



---

Είναι για όλους «εύκολη» η  
κατανόηση των αριθμών;

---

Ατομικές διαφορές

---

Αυθόρμητη εστίαση στα αριθμητικά  
χαρακτηριστικά μιας κατάστασης

---

Spontaneous focusing on numerosity  
(SFON)

# Προκειμένου να αναπτύξει ένα παιδί κατανόηση για τον αριθμό...

- ... πρέπει καταρχήν να στρέφει την προσοχή του στα αριθμητικά χαρακτηριστικά πολλών και διαφορετικών καταστάσεων
- Μα δεν είδαμε ότι ακόμα και τα βρέφη το κάνουν αυτό;;
  - Ναι, αλλά
    - αυτές οι έρευνες γίνονται με αυστηρά ελεγχόμενα ερεθίσματα
    - τα αποτελέσματα είναι ποσοτικά (μέσες τιμές διάρκειας εστίασης του βλέμματος) και δε δίνουν πληροφορίες για το κάθε ένα βρέφος ξεχωριστά
  - Τι γίνεται εκτός εργαστηρίου;

# SFON

- Σε μια μακροχρόνια μελέτη, οι Hannula & Lehtinen εξέτασαν το SFON σε 39 μικρά παιδιά, ξεκινώντας από τον παιδικό σταθμό (μέση ηλικία περίπου 3 ½ ετών) σε τρεις φάσεις με ενδιάμεσο διάστημα 1 χρόνου και σε μεγαλύτερα παιδιά (μέση ηλικία 6 ½ ετών) άπαξ
- Ταυτόχρονα, εξέτασαν άλλες μαθηματικές ικανότητες σχετικές με τον αριθμό, όπως η απαρίθμηση
- Στη δεύτερη περίπτωση, εξέτασαν και το δείκτη ευφυΐας, και τη γενική γλωσσική ικανότητα.

# Έργα για SFON I

- Στα 4 και 5 χρόνια
  - Η ερευνήτρια «ταΐζει» ένα (ψεύτικο) παπαγάλο ένα πλήθος (<3) από «φρούτα».
  - Δίνει στο παιδί την οδηγία «κάνε ακριβώς ό,τι έκανα»
  - Ελέγχει αν το παιδί έδωσε το σωστό πλήθος φρούτων, ή αν η συμπεριφορά του δείχνει ότι έλαβε υπόψη το πλήθος
    - Π.χ. «Δεν τα μέτρησα σωστά!» «Του έδωσα ακριβώς όσα έπρεπε».

# Έργα για SFON II

- Στα 6 χρόνια
  - Η ερευνήτρια χρησιμοποιεί 3 λογίων σφραγίδες ένα αρχικό σκίτσο δεινόσαυρου
  - Αναποδογυρίζει το χαρτί
  - Ζητά από το παιδί να φτιάξει το ίδιο

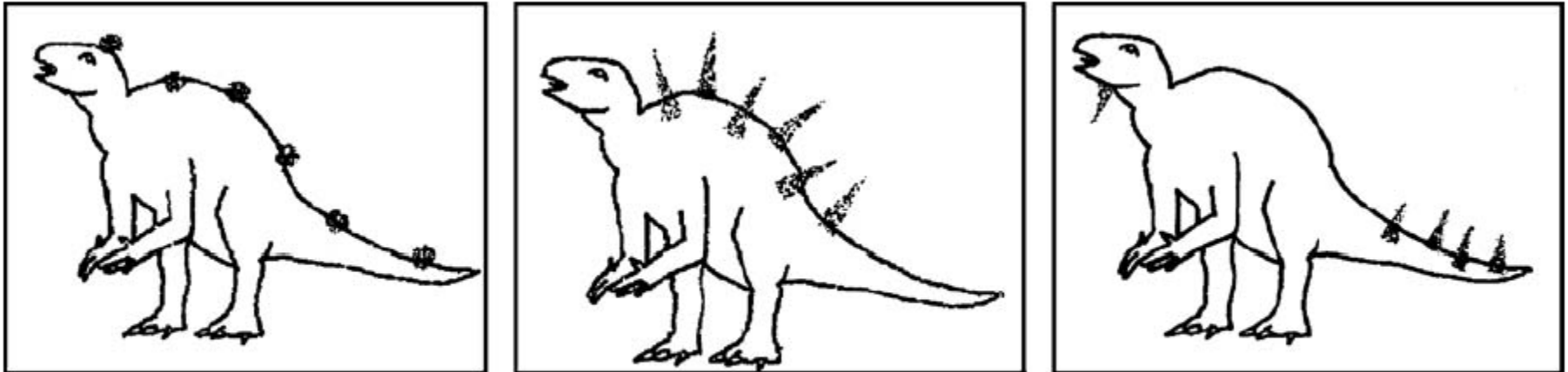


Fig. 1. The models of the 1st, 2nd, and 3rd item in the Model task.

# Αποτελέσματα

- Υπάρχουν ατομικές διαφορές ως προς το χαρακτηριστικό SFON
- Υπάρχει σχέση ανάμεσα στο SFON και στις εξεταζόμενες μαθηματικές ικανότητες
- Το SFON δε φαίνεται να συνδέεται με το γενικό δείκτη ευφυΐας και τη γλωσσική ικανότητα
- Το χαρακτηριστικό SFON συνδέεται με τη γνωστική λειτουργία της προσοχής, αλλά φαίνεται να είναι domain-specific.
- Πώς ξεκινάνε οι ατομικές διαφορές ως προς το SFON;;

---

# Επιδράσεις του κοινωνικο- οικονομικού περιβάλλοντος

---



# Κοινωνιο-οικονομικό υπόβαθρο και μαθηματική ικανότητα I

- Τα παιδιά που προέρχονται από χαμηλά κοινωνικο-οικονομικά στρώματα υστερούν σε σχέση με τα παιδιά που προέρχονται από υψηλά κοινωνικο-οικονομικά στρώματα, όσον αφορά τις μαθηματικές τους ικανότητες που σχετίζονται με τη συμβολική πλευρά των μαθηματικών ήδη από το **(προ-) νηπιαγωγείο**
  - Π.χ. λεκτική ή γραπτή χρήση αριθμών
- Αυτό παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχουν ιδιαίτερες διαφορές στη μη λεκτική αντιμετώπιση καταστάσεων με μαθηματικό περιεχόμενο
- Ξανά το χάσμα ανάμεσα στη «διαισθητική», εμπειρική κατανόηση και τη συμβολική κατανόηση

# Κοινωνιο-οικονομικό υπόβαθρο και μαθηματική ικανότητα II

- Αυτές οι αρχικές διαφορές **προβλέπουν** τη μαθηματική ικανότητα στο νηπιαγωγείο, το δημοτικό, ακόμα και στο γυμνάσιο και λύκειο
- Η σχέση ανάμεσα στις αρχικές διαφορές στα μαθηματικά και τη μετέπειτα επίδοση είναι **ισχυρότερη** από τις αντίστοιχες σχέσεις σε άλλα αντικείμενα, όπως η γλώσσα
- Επιπλέον, οι διαφορές **οξύνονται** με το χρόνο

---

Από πού προέρχονται αυτές οι  
διαφορές;

---

Το θέμα της έκθεσης σε σχετικές  
εμπειρίες

# Ένα είδος εμπειριών: Επιτραπέζια παιχνίδια

- ...με (κάποιο) μαθηματικό περιεχόμενο
  - Σκεφτείτε το «φιδάκι» - τι μπορεί να μάθει για τους αριθμούς ένα παιδί παίζοντας φιδάκι με την οικογένεια ή τους φίλους του;
-

# Ευρήματα

- Τα παιδιά (προσχολικής) από χαμηλά κοινωνικο-οικονομικά στρώματα έχουν πολύ λιγότερες εμπειρίες με επιτραπέζια που έχουν κάποιο μαθηματικό περιεχόμενο – τα περισσότερα δεν έχουν παίξει ποτέ
- Η εμπειρία με επιτραπέζια παιχνίδια σχετίζεται με την επίδοσή τους σε μαθηματικά έργα
- Παρέμβαση με επιτραπέζια παιχνίδια σε παιδιά από χαμηλά κοινωνικο-οικονομικά στρώματα που υστερούσαν στα μαθηματικά είχε θετικά αποτελέσματα
  - Κάθε παιδί συνάντησε έναν ερευνητή 4 φορές μέσα σε 2 εβδομάδες. Κάθε συνάντηση διαρκούσε 15 -20 λεπτά. Το παιχνίδι διαρκούσε 2-4 λεπτά, και στη διάρκεια των συναντήσεων τα παιδιά έπαιξαν 20 φορές το παιχνίδι.

# Lev Vygotsky (1896-1934)



---

Κοινωνικός εποικοδομητισμός  
(social constructivism)

# Η κοινωνική/πολιτισμική συνιστώσα στην ανάπτυξη της σκέψης

- Το κοινωνικό/πολιτισμικό περιβάλλον διαμεσολαβεί την ανάπτυξη της σκέψης ως προς
  - το περιεχόμενο: τη γνώση
  - τον τρόπο: τα «εργαλεία» της σκέψης
- Η γλώσσα έχει κεντρικό ρόλο στην αλληλεπίδραση του παιδιού με τους ενήλικες
  - Το παιδί εσωτερικεύει τη γλώσσα και η γλώσσα σταδιακά γίνεται εργαλείο σκέψης για το παιδί
- Γενικότερα:
  - Η οντογενετική γνωστική ανάπτυξη πηγάζει από την εσωτερίκευση των συμβολικών συστημάτων (όπως η γλώσσα και τα μαθηματικά) που έχει παράγει ο ανθρώπινος πολιτισμός
  - Η σημασία των εργαλείων/τεχνουργημάτων (tools/artifacts)

---

## Η σημασία των εργαλείων/τεχνουργημάτων (tools/artifacts)

Τα συστήματα των συμβόλων και εργαλείων που δημιουργεί ο πολιτισμός αλλάζουν την συμπεριφορά και τη νόηση – ο μηχανισμός της ατομικής ανάπτυξης έχει τις ρίζες του στην κοινωνία και στον πολιτισμό.

---



---

Κατώτερες λειτουργίες/  
Ανώτερες λειτουργίες

---

Διάκριση

---

# Κατώτερες λειτουργίες

- 
- Είναι άμεσες αντιδράσεις στα ερεθίσματα του περιβάλλοντος
  - Δεν διαμεσολαβούνται από εσωτερικευμένα συμβολικά συστήματα

# Ανώτερες λειτουργίες

- Διαμεσολαβούνται από εσωτερικευμένα συμβολικά συστήματα
- Επιτρέπουν στον άνθρωπο να αναπτύξει συμπεριφορές πέραν των ενστικτωδών και τον διαφοροποιούν τον άνθρωπο από τα άλλα ζώα

# Το πέρασμα από κατώτερες σε ανώτερες λειτουργίες: Ένα παράδειγμα

Ένα βρέφος κάνει μια ανεπιτυχή κίνηση για να πιάσει ένα επιθυμητό αντικείμενο. Σε αυτή τη φάση, η κίνηση αυτή δεν έχει κάποιο άλλο νόημα για το βρέφος. Αν όμως η μητέρα του βρέφους ερμηνεύσει την κίνηση κατάλληλα και το βοηθήσει να πιάσει το αντικείμενο, τότε η κίνηση αποκτά ένα διαμεσολαβημένο από το περιβάλλον νόημα για το βρέφος: «Δείχνω κάτι, βοήθησέ με να το πιάσω». Το βρέφος αρχίζει να χρησιμοποιεί την κίνηση, επικοινωνώντας με το περιβάλλον (τη μητέρα ή άλλο πρόσωπο) και επιτυγχάνοντας το σκοπό του (να πιάσει το αντικείμενο). Σταδιακά, το παιδί μπορεί να αξιοποιήσει την ίδια κίνηση για να ασκήσει έλεγχο στη συμπεριφορά του (π.χ. να τοποθετήσει το δείκτη του σε μέρος μιας εικόνας, προκειμένου να συγκεντρώσει την προσοχή του σε αυτό)

---

# Έννοια-κλειδί

---

Η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης

---

# Zone of proximal development

"the distance between the actual development level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers"

Vygotsky, 1978

*(Mind and society: The development of higher mental processes )*

---

---

# Η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης

- είναι η διαφορά ανάμεσα σε αυτό που το παιδί μπορεί να επιτύχει χωρίς και με βοήθεια (από έναν ενήλικα ή ένα πιο «προχωρημένο» συνομήλικό παιδί)
-

# Υπάρχουν στάδια ανάπτυξης κατά τον Vygotsky?

- Ο Vygotsky δέχεται ότι υπάρχουν όρια στη ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης που τίθενται από την ηλικία.
- Ωστόσο, θεωρεί ότι η ανάπτυξη είναι πολύ πολύπλοκη για να περιγραφεί επαρκώς με στάδια



---

Τα Μαθηματικά...

... ως συμβολικό σύστημα

---

---

# Τι είναι «σύμβολο»;

- Σύμβολο είναι *κάτι* που **αναπαριστά** *κάτι άλλο*
    - *Κάτι*: Μια φυσική οντότητα, μια ιδέα, μια διαδικασία
-

---

# Σύμβολα

**Cat**



**Chat**

**Γάτα**

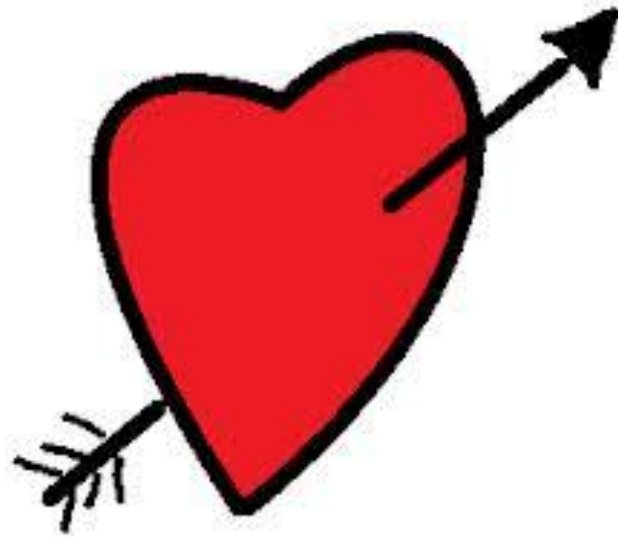
---

---

# Σύμβολα



# Σύμβολα



---

Σύμβολα

**επτά**

**7**

**?**

**七**

**sept**

**seven**

---

# Αιόμα και τα πιο απλά μαθηματικά σύμβολα (μπορεί να)...

- ...αναφέρονται σε αφηρημένα αντικείμενα
  - «Τα τρία παπάκια είναι περισσότερα από τα δύο παπάκια»
    - έναντι του
  - «Το τρία είναι μεγαλύτερο από το δύο»
- ...αποκτούν νόημα στο πλαίσιο ενός συστήματος
  - Από τις σχέσεις τους με άλλα αφηρημένα αντικείμενα
    - Το επτά είναι ένα περισσότερο από το έξι
    - Κάθε φυσικός αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενό του συν ένα

---

# Θυμηθείτε τον Vygotsky

- Τα συμβολικά συστήματα που χρησιμοποιούνται σε ένα δεδομένο πολιτισμικό πλαίσιο γίνονται **εργαλεία σκέψης**
  - Επομένως, επηρεάζουν τη σκέψη και τη δράση
  - Πώς σκεφτόμαστε, πώς μιλάμε, τι μπορούμε να κάνουμε, τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε
-



# Παράδειγμα: Ρωμαϊκά σύμβολα για τους αριθμούς

- I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X.
  - L: 50, C: 100, D: 500, M: 1.000
  - 1910 : MDCCCCX
-

# Κανόνες;

- There has never been a universally accepted set of rules for Roman numerals.<sup>1</sup>
- The symbols "I", "X", "C", and "M" can be repeated three times in succession, but no more. (They may appear more than three times if they appear non-sequentially, such as XXXIX.) "D", "L", and "V" can never be repeated
- "I" can be subtracted from "V" and "X" only. "X" can be subtracted from "L" and "C" only. "C" can be subtracted from "D" and "M" only. "V", "L", and "D" can never be subtracted
- Only one small-value symbol may be subtracted from any large-value symbol

## Σκεφτείτε:

- Τι δυνατότητες σας δίνει το δικό μας (δεκαδικό) αριθμητικό σύστημα, που δε σας δίνει το ρωμαϊκό;

# Διαπολιτισμικές μελέτες έχουν δείξει...

- ... ότι η εκμάθηση της αριθμητικής ακολουθίας επηρεάζεται από το είδος των αριθμολέξεων που πρέπει να μάθουν τα παιδιά
  - Και αυτό έχει συνέπειες και για την περαιτέρω μαθηματική τους ανάπτυξη

# Αγγλόφωνα έναντι Κινεζόφωνων παιδιών

- Όσον αφορά την (απ)αρίθμηση:
  - Μέχρι την ηλικία των 3 ετών, δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ παιδιών στις ΗΠΑ και στην Κίνα
  - Μετά την ηλικία αυτή, τα κινεζάκια «απογειώνονται»
- Γιατί;;

# Μια πιθανή εξήγηση

- Σκεφτείτε τις αγγλικές αριθμολέξεις από το 10 ως το 20.
  - Στα κινεζικά, οι αριθμοί μετά το 10 ακολουθούν ένα κανονικό πρότυπο
    - 10-1, 10-2, 10-3, ....
  - Τι εξήγηση θα δίνατε;
-

---

# Κρατήστε στο μυαλό σας

- Ένα συμβολικό σύστημα δεν εξαντλείται στα σύμβολα
  - Διέπεται από κανόνες (διαδικαστικούς αλλά όχι μόνο) και συμβάσεις
    - Είναι κάτι που θα μας απασχολήσει από την πλευρά της μάθησης
-

---

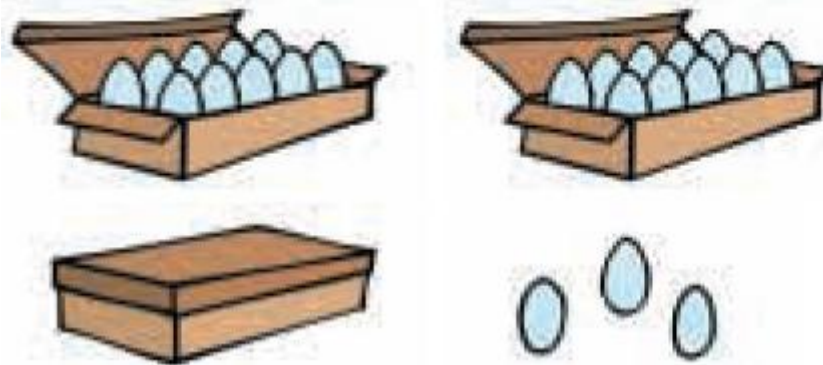
# Αναπαραστάσεις, μοντέλα, σύμβολα, και συμβάσεις

... μια γρήγορη ματιά και θα επανέλθουμε

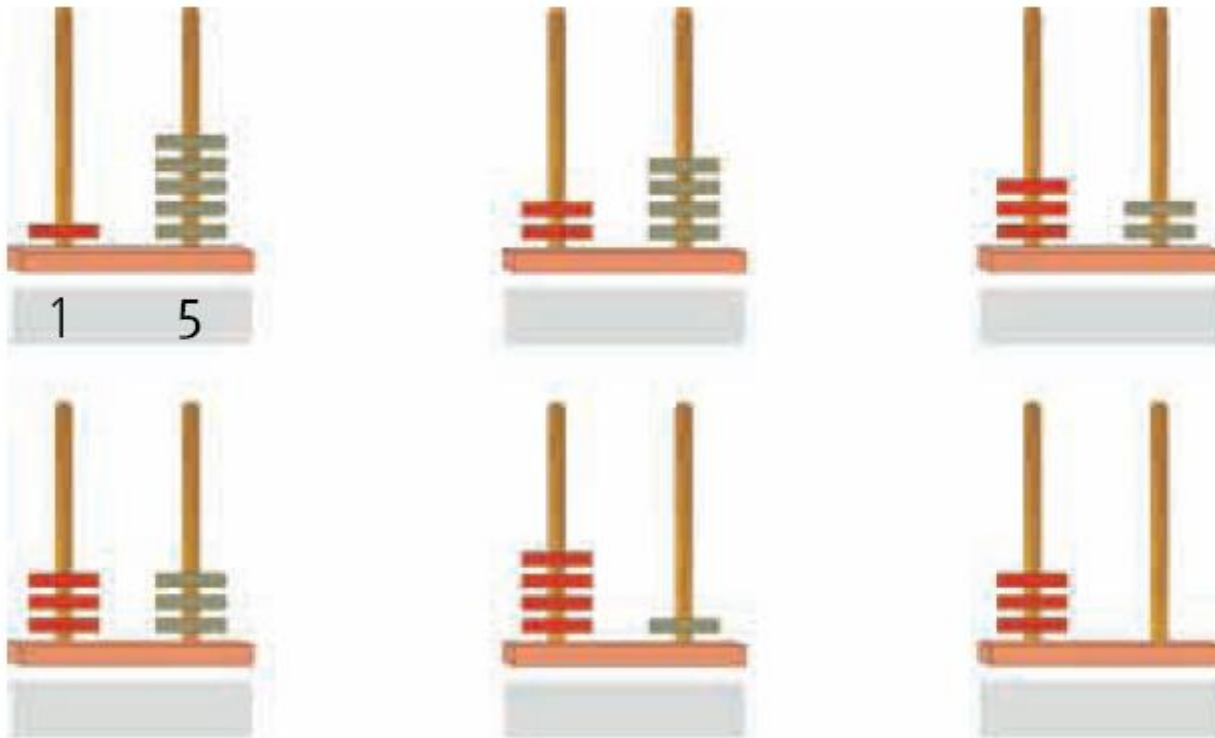
---



Ποιες μαθηματικές ιδέες «κρύβονται» πίσω από αυτή την εικόνα; Ποιος μπορεί να τις «δει» ;



Ποιες μαθηματικές ιδέες «κρύβονται» πίσω από αυτό το μοντέλο; Ποιος μπορεί να τις «δει» ;



Ποιες μαθηματικές ιδέες «κρύβονται» πίσω από αυτή την εικόνα; Ποιος μπορεί να τις «δει» ;



Ποιες μαθηματικές ιδέες κρύβονται πίσω από αυτό το παιχνίδι; Ποιος μπορεί να τις «δει» ;



Παίζουμε το «Φιδάκι»

### Κανόνες του παιχνιδιού

Χρειάζεται ένα ζάρι στο οποίο οι πλευρές με τους αριθμούς 4, 5 και 6 θα έχουν κόκκινο χρώμα, ενώ οι πλευρές με τους αριθμούς 1, 2 και 3 θα έχουν μπλε χρώμα. Ο αριθμός από τον οποίο ξεκινάμε είναι το 12. Κάθε παίκτης με τη σειρά ρίχνει το ζάρι. Όταν το ζάρι δείχνει μια κόκκινη πλευρά, προχωρούμε μπροστά τόσες θέσεις όσες δείχνει το ζάρι. Όταν το ζάρι δείχνει μια μπλε πλευρά, πηγαίνουμε πίσω τόσες θέσεις όσες δείχνει το ζάρι. Νικητής θα είναι αυτός που θα φτάσει πρώτος στο 30.

Ποιες μαθηματικές ιδέες μπορούν να αναδειχθούν με τη χρήση κερμάτων; Ποιος μπορεί να τις «δει» ;



Ποιες μαθηματικές ιδέες «κρύβονται» πίσω από αυτή την εικόνα; Ποιος μπορεί να τις «δει» ;



$$8 \times 5\text{€} = \text{..... €}$$

Ποιες μαθηματικές έννοιες «κρύβονται» στην παρακάτω εικόνα; Ποιος μπορεί να τις «δει»;



---

Ποιες μαθηματικές ιδέες κρύβονται στο παρακάτω σχέδιο; Τι μπορεί να αναπαριστά αυτό το σχήμα;





# Βασικές επισημάνσεις

- Τα μοντέλα από μόνα τους δεν «μεταδίδουν» μαθηματικές ιδέες
  - Πέντε πάπιες είναι απλώς πέντε πάπιες, και όχι «μοντέλο» της έννοιας του 5.
- Ένα μοντέλο λειτουργεί ως τέτοιο, όταν *ερμηνεύεται* με κατάλληλο τρόπο
- Η ερμηνεία προϋποθέτει εστίαση όχι στα επιφανειακά χαρακτηριστικά του μοντέλου, αλλά σε *ιδιότητες και σχέσεις*
  - Οι πέντε πάπιες γίνονται μοντέλο της έννοιας του 5, όταν μπορούμε να κατανοήσουμε ότι οι πέντε πάπιες, τα πέντε δάκτυλα, οι πέντε κουκκίδες, ..., έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό.

---

# Το «παράδοξο» που πρέπει να έχουμε υπόψην μας

- Τα μοντέλα είναι –καταρχήν- «διαφανή» για το γνώστη, αλλά «αδιαπέραστα» για τον αρχάριο.
  - Η απλή παρουσία/ση των μοντέλων δε συνεπάγεται τη μεταφορά των μαθηματικών ιδεών στο κεφάλι του παιδιού.
-