Τρεις συνιστώσες του *αριθμητισμού*

Συνδέστε με αυτά που έχουμε συζητήσει μέχρι τώρα

Nunes & Bryant, 2007

Τι είναι *αριθμητισμός;*

- Ίσως έχετε ακούσει κάποιους να παραπονιούνται ότι τα σημερινά παιδιά δεν αποκτούν στοιχειώδεις μαθηματικές γνώσεις και θα ήθελαν στο Νηπιαγωγείο και στο Δημοτικό η έμφαση να δίνεται στους αριθμούς και τις 4 πράξεις.
  - Το κίνημα “back to basics”

- Αρκεί/χρειάζεται να ξέρει κανείς τους αριθμούς και τις 4 πράξεις για να είναι λειτουργικός στην καθημερινή, τη σχολική/ακαδημαϊκή και την επαγγελματική του ζωή;

Θυμηθείτε

- Τίτλος άρθρου εφημερίδας :

ΣΟΚ!! Ένας στους τέσσερις άνδρες μεγαλώνει εν αγνοία του παιδί που δεν είναι δικό του!

- Μπορεί κανείς να μείνει στον τίτλο, ή να αναρωτηθεί…

- Μέσα στο κείμενο του άρθρου:

Από τους τέσσερις άντρες που ζητούν τεστ πατρότητας, ο ένας δεν είναι ο βιολογικός πατέρας του παιδιού που μεγαλώνει.

Οι Nunes & Bryant...

- ...θέτουν 3 προϋποθέσεις προκειμένου να γίνουν τα παιδιά *ενάριθμα*
  - Πρέπει να σκέφτονται με τους «λογικούς κανόνες»
    - των αριθμών!
  - Πρέπει να μάθουν τα συστήματα συμβάσεων
    - Και να έχουν *επίγνωση* ότι υπάρχουν
  - Πρέπει να μπορούν να χρησιμοποιούν τη γνώση τους για τους αριθμούς κατάλληλα, ανάλογα με τις περιστάσεις
    - Η γνώση να είναι λειτουργική

«Λογική» σκέψη για τους αριθμούς … και άλλα

Ποιος γνωστός σας ψυχολόγος μιλούσε για τους «κανόνες λογικής»;

Nunes & Bryant, 2007

«Κανόνας λογικής»: Παράδειγμα

- Μαθαίνω να απαγγέλω «ένα, δύο, τρία,…»
- Κατανοώ ότι η σειρά των λέξεων έχει σημασία
- Κατανοώ ότι:
  - Τα 5 είναι περισσότερα από τα 4
  - Τα 4 είναι περισσότερα από τα 3
  - Άρα, τα 5 είναι περισσότερα από τα 2
  - Αν α>β και β>γ, τότε α>γ
- Ποιο από τα παραπάνω δεν είναι ένας «κανόνας λογικής»;

«Κανόνες λογικής»: Κι άλλο παράδειγμα

- Μαθαίνω ένα τραγουδάκι που λέει «ένα κι ένα κάνουν δυό»
- Κατανοώ ότι:
  - Αν ένα και ένα κάνουν δύο, τότε δύο μείον ένα κάνει ένα
  - Αν α+β=γ, τότε α=γ-β
- Ποιο από τα παραπάνω δεν είναι ένας «κανόνας λογικής»;

Τα μαθηματικά (και του Νηπιαγωγείου!)...

- …διέπονται από «κανόνες λογικής»
- Με μερικούς από αυτούς είμαστε τόσο εξοικειωμένοι, που μας φαίνονται τετριμμένοι - δεν είναι!
- Τι έχετε να πείτε π.χ. για τον κανόνα «η σχετική θέση των αντικειμένων που καταμετρώ δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της καταμέτρησης» ;

Οι «λογικοί κανόνες» δεν είναι τετριμμένοι: άλλο παράδειγμα

- Μας φαίνεται αυτονόητο ότι 4+3 = 3+4
  - Και γενικότερα, ότι α+β = β+α, α, β∈R

- Όπως θα δούμε σε επόμενα μαθήματα, μια από τις στρατηγικές για την πρόσθεση που αναπτύσσουν τα μικρά παιδιά είναι η εξής:
  - Αν έχω να προσθέσω 5 + 5:
    - Ξεκινώ από το πέντε και απαγγέλω τις 5 επόμενες αριθμολέξεις («έξι», «εφτά»,…, «δέκα»)

- Τι γίνεται με το άθροισμα 2+8;

Ξαναγυρνώντας στον Piaget

- Μπορεί ο Piaget να έχει δεχτεί κριτικές για διάφορες πτυχές του θεωρητικού και πειραματικού του έργου
- Ωστόσο, η ιδέα ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης απαιτεί «λογική σκέψη», ακόμα και στα θεωρούμενα ως στοιχειώδη μαθηματικά, εξακολουθεί να είναι σημαντική

Συστήματα συμβάσεων

Πολλά πράγματα που δεχόμαστε, κάποτε ως αυτονόητα, στα Μαθηματικά…

- …βασίζονται κατά τρόπο ουσιαστικό σε συμβάσεις
  - Χρησιμοποιούμε ένα σύστημα αρίθμησης με βάση το 10
    - Δεν είναι το ίδιο με των Αρχαίων Βαβυλωνίων
  - Χρησιμοποιούμε το μέτρο και τα (υπο)πολλαπλάσιά του για να μετρούμε το μήκος
    - Όχι όμως και οι Άγγλοι
  - Ορίζουμε: $x^{-1} = 1/x$ ($x \neq 0$).
    - Γιατί;;
  - Λέμε: «Κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα σημείο της ευθείας – και αντίστροφα»
    - Δεν αποδεικνύεται
  - Λέμε: «Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^{o} »
    - Δεν ισχύει σε όλες τις Γεωμετρίες

Συμβάσεις: Ένα παράδειγμα

- Τοποθετείστε το 5/3 στην κατάλληλη θέση

- Πόσες συμβάσεις κρύβονται πίσω από αυτό το ερώτημα και την απάντησή του; Ποιες από αυτές είναι πιθανόν να μην είχατε καταλάβει;

Συμβάσεις: άλλο παράδειγμα

- Σας δίνω ένα «μεγάλο» ευθύγραμμο τμήμα περίπου π.χ. 40 εκατοστά
- Σας δίνω και ένα «μικρό» χάρακα των 10 εκατοστών.
- Μπορείτε να μετρήσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος με αυτόν το χάρακα;
  - Παιδιά γύρω στα 6 χρόνια αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες με το συγκεκριμένο έργο
    - Γιατί;;

Κατάλληλη χρήση της μαθηματικής γνώσης, ανάλογα με τις περιστάσεις

Nunes & Bryant, 2007

Έχουμε συναντήσει στο σχολείο…

- … πολλά «μαθηματικά»

- Τι ποσοστό από αυτά μπορούμε να αξιοποιήσουμε στην κατάλληλη περίσταση, με τον κατάλληλο τρόπο;

Ένα παράδειγμα

- Πρωταγωνιστές
  - Roni, 4 ετών
  - Eynat, 4 ετών και 7 μηνών
  - Irit Lavie, η μητέρα της Roni

Η ιστορία εκτυλίσσεται…

in Roni's house. The aim of the conversation was to probe the two girls' arithmetical competence. The mother knew in advance that the children had already attained proficiency in counting, and she believed that they might now be able to apply this skill in comparing sets of varying cardinality. What actually happened surprised the grown-ups and left them puzzled.

Episode I

1.	Mother	I brought you two boxes. Do you know what is there in the boxes?	Puts two identical closed opaque boxed on the carpet, next to the girls.
2.	Roni	Yes, marbles.	
3a.	Mother	Right, there are marbles in the boxes.	While saying this, points to the box close to Eynat, then to the other one.
3b.	Mother	I want you to tell me in which box there are more marbles.	
3c.	Eynat		Points to the box which is closer to her.
3d.	Roni		Points to the box Eynat is pointing to.
4.	Mother	In this one? How do you know?	Points to the box the girls pointed to.
5.	Roni	Because this is the biggest than this one. It is the most.	While saying "than this one" points to the other box [the one close to her]
6.	Mother	Eynat, how do you know?	
7.	Eynat	Because… cause it is more huge than that.	Repeats Roni's pointing movement when saying "than that"
8.	Mother	Yes? This is more huge than that? Roni, what do you say?	Repeats Roni's and Eynat's pointing movement when saying "than that"
9.	Roni	That this is also more huge than this.	Repeats the above pointing movement when saying "than this"

Το ζήτημα αυτό…

- … είναι κρίσιμο στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης
- Η εκμάθηση διαδικασιών και τεχνικών μπορεί να αποβεί εντελώς άχρηστη, αν κανείς δεν μπορεί να αναγνωρίσει τις περιστάσεις εκείνες στις οποίες μπορεί να αξιοποιηθεί
  - Ανενεργή γνώση, Κατακερματισμένη γνώση; Μεταφορά της γνώσης

Μια χρήσιμη διάκριση: Εννοιολογική & Διαδικαστική γνώση

- Εννοιολογική γνώση
  - Πλούσια, σύνθετα δίκτυα αλληλοσυνδεόμενων ιδεών
- Διαδικαστική γνώση
  - Γνώση συμβολισμού, κανόνων, διαδικασιών

- Να συγκριθούν τα κλάσματα 14/17 και 3/2
  - «Για να συγκρίνω το 14/17 με το 3/2, πρέπει να τα κάνω ομώνυμα. Θα βρω το Ε.Κ.Π., και μετά …»
  - «Το 14/17 είναι μικρότερο από το 3/2, γιατί το 1ο είναι μικρότερο από την μονάδα, ενώ το 2ο είναι μεγαλύτερο»

- Στο παράδειγμα με τη Roni και την Eynat, ποια είναι η διαδικαστική γνώση που χρησιμοποιούν; Ποια είναι η εννοιολογική γνώση που λείπει;

Σχέση ανάμεσα στην εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση

- Καμία από τις δύο δεν είναι ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της άλλης
- Είναι και οι δύο απαραίτητες
- Στην παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών, η έμφαση δίνεται στην .... γνώση
  - Τι προβλήματα δημιουργεί αυτό;

Η δημιουργία συνδέσεων…

… ως μια «θεραπεία» για την κατακερματισμένη, αδρανή γνώση

Μια υπόθεση για την οργάνωση της γνώσης

- Στην (αποτελεσματική) μάθηση οι «γνώσεις» οργανώνονται σε σύνθετα δίκτυα και συνδέονται μεταξύ τους
  - Όσο περισσότερες συνδέσεις, τόσο βαθύτερη η αίσθηση της κατανόησης
  - Οι κατακερματισμένες «γνώσεις» είναι αδύναμες
- Όταν μαθαίνουμε κάτι καινούργιο, όσο περισσότερες συνδέσεις κάνουμε, τόσο βαθύτερα κατανοούμε

Hughes, M. (2002/1985). Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών (μτφρ. Στ. Σταφυλίδου). Αθήνα: Gutenberg.

Τα «τσίγκινα κουτιά» του M. Hughes: Ένα παράδειγμα δημιουργίας συνδέσεων

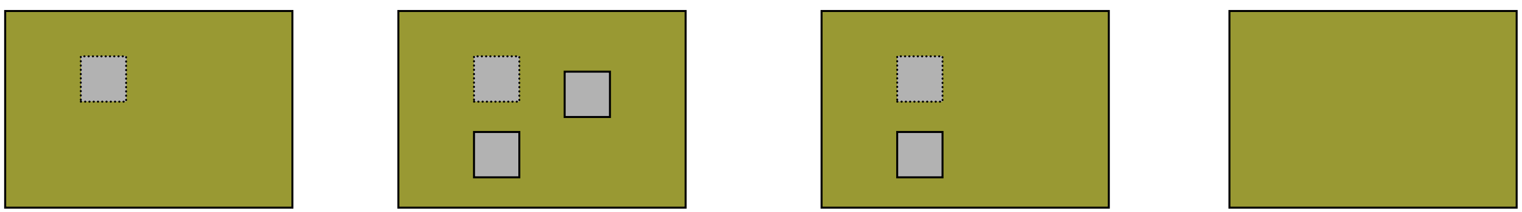
… και όχι μόνο

Πώς παίζεται το παιχνίδι;

- 4 ίδια κουτιά
- Κάθε κουτί περιέχει 0, 1, 2, ή 3 τουβλάκια
- Το παιδί βλέπει τι έχει κάθε κουτί
- Τα κουτιά «ανακατεύονται»
- Ζητείται από το παιδί να βρει το κουτί με τα π.χ. 2 τουβλάκια
- Σε 2η φάση, ζητείται από το παιδί να σημειώσει πάνω στο κάθε κουτί «κάτι» που θα το βοηθήσει να θυμάται τι περιέχει

Τα «τσίγκινα κουτιά» του Hughes

- Τοποθετώντας μαγνητικά ψηφία στα κουτιά με τα τουβλάκια, τι *συνδέσεις* χρειάζεται να κάνει ένα μικρό παιδί;



- Μηδέν, ένα, δύο, τρία, τέσσερα,…
- **0, 1, 2, 3, 4**

Οικοδομώντας γνώση

- «Τέσσερα παιδιά είχαν 3 σακουλάκια με καραμέλες. Αποφάσισαν να τα ανοίξουν και να τις μοιραστούν δίκαια. Σε κάθε σακουλάκι υπήρχαν 52 καραμέλες. Πόσες καραμέλες πήρε κάθε παιδί;»
  - Πώς μπορεί να λυθεί το πρόβλημα αυτό από κάποιον που ΔΕΝ ξέρει τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας διαίρεσης;

Δύο τρόποι υπολογισμού από παιδιά της Δ' Δημοτικού

- 1ο παιδί
  - Υπολογίζει νοερά το 3x52
  - Υπολογίζει πόσες 4-άδες μπορεί να «βγάλει» από το 156, χρησιμοποιώντας βολικά πολλαπλάσια του 4 (π.χ. 10x4 και 4x4), μέχρι να φτάσει στο 100.
  - Αθροίζει όλες τις τετράδες

Δύο τρόποι υπολογισμού

- 2ο παιδί
  - Έφτιαξε 4 στήλες
  - Μοίρασε βολικά ποσά σε κάθε στήλη, κάνοντας νοερούς υπολογισμούς
  - Πρόσθεσε τα ποσά σε κάθε στήλη

Τι αποκαλύπτουν αυτοί οι τρόποι υπολογισμού για την κατανόηση που έχουν «χτίσει» τα παιδιά;

Συνδέσεις!

Υπάρχει κάποιο γινόμενο από την προπαίδεια που δυσκολεύεστε να θυμηθείτε απ' έξω;

- Με ποιους τρόπους μπορείτε να ξεπεράσετε το πρόβλημα;
- Τι είδους *συνδέσεις* αποκαλύπτουν αυτοί οι τρόποι;

Ποια είναι τα οφέλη της δημιουργίας συνδέσεων;

- Κατανόηση → Εσωτερική επιβράβευση
- Διευκόλυνση των διαδικασιών της μνήμης
  - Και λιγότερα πράγματα για αποστήθιση
    - Π.χ. σε τι διευκολύνει η κατανόηση της αξίας θέσης των ψηφίων στους αριθμούς;
- Υποστήριξη στην εκμάθηση νέας γνώσης (είτε εννοιολογικής, είτε διαδικαστικής)
- Βελτίωση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος
- Η κατανόηση παράγει νέα κατανόηση
- Βελτίωση στάσεων και πεποιθήσεων (για τη μάθηση, τα μαθηματικά, την αυτεπάρκεια…)

Τι συμβαίνει όταν δεν δημιουργούνται συνδέσεις;

- Κατακερματισμένη γνώση
- Αδρανής γνώση
- Δυσκολία στην απο-πλαισίωση/μεταφορά της γνώσης

Λόγος: Δίκτυο συνδέσεων

- Κλάσμα
- Πηλίκο
- Κλίμακες
- Κλίση
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Όμοια σχήματα
- Η ταχύτητα
- Σύγκριση
- ………………………………………………………………….

Η έννοια του «μισού»

- Μοιράζω δίκαια στα δύο
  - Μια διακριτή ποσότητα
  - Ένα συνεχές μέγεθος
- Παρατηρώ ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας. Ποιο είναι το μισό του;
- Συνταγές (μισό ποτήρι νερό ή γάλα)
- Δείχνω στο ρολόι τη μισή ώρα
- Παίζω με τα «ζευγαράκια»: 1+1, 2+2, 3+3…..
  - Ποιο είναι το μισό του 2;
  - Ποιο είναι το μισό του 6;
- Με ποιες έννοιες συνδέεται στενά η έννοια του «μισού»;
  - Η έννοια του «διπλάσιου»
  - Η έννοια της *μονάδας*

Μεταφορά της γνώσης

… δεν είναι κάτι απλό!

Πουλώντας καρύδες στη Βραζιλία

- Παιδιά που δούλευαν ως μικροπωλητές στο δρόμο
- Παρακολουθούσαν με διακοπές το σχολείο
- Ερευνητές που παρουσιάστηκαν ως πελάτες
- Τεστ με χαρτί και μολύβι στο πλαίσιο του σχολείου – ίδιες πράξεις με αυτές που τους ζήτησαν ως πελάτες

Carraher, Carraher & Schliemann,1985

Παράδειγμα:Πελάτης=Συνεντευκτής, Μ=Μαθητής Γ΄Δημοτικού, 12 ετών

Πελάτης: *Πόσο κάνει μια καρύδα;*

Μ: 35

Πελάτης: *Θα ήθελα τέσσερις. Πόσο κάνουν;*

Μ:(Παύση) *Οι τρείς κάνουν 105, συν 30, μας κάνει 135…μία καρύδα κάνει 35…δηλαδή..140!*

- Μπορούμε να πούμε ότι ο Μ. απάντησε και στις ακόλουθες υποερωτήσεις:
  - 35x3 (που μπορεί να ήταν ήδη γνωστό)
  - 105+30
  - 135+5
  - 3+1
  - 35x4

Η δημιουργία συνδέσεων προϋποθέτει τον εντοπισμό σχέσεων

Κρατήστε στο μυαλό σας καθώς θα μιλάμε για την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος

Το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα - ξανά

- Γιατί ονομάζουμε το γνωστό μας αριθμητικό σύστημα «δεκαδικό»;
- Είναι το 10 η μόνη δυνατή επιλογή βάσης για ένα αριθμητικό σύστημα;
- Είναι ένα σύστημα βάσης η μόνη δυνατή επιλογή για να «μιλήσουμε» για αριθμούς;

Το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα - ξανά

- Ποια είναι η κεντρική ιδέα που διαπερνά οποιοδήποτε σύστημα βάσης;
- Το αριθμητικό μας σύστημα είναι θεσιακό – τι σημαίνει αυτό;
- Τι δυνατότητες μας δίνει ένα θεσιακό αριθμητικό σύστημα βάσης, που δε μας δίνουν άλλου τύπου αριθμητικά συστήματα;

Η κατανόηση του αριθμητικού συστήματος

Πέρα από την απαρίθμηση και την καταμέτρηση

Πέρα από την απαρίθμηση & την καταμέτρηση

- Έχουμε συζητήσει εκτενώς για την απαρίθμηση και την καταμέτρηση και τις απαιτήσεις που έχει για τα παιδιά η τελευταία

- Αυτά που πρέπει να κατανοήσουν τα παιδιά για τους αριθμούς, ωστόσο, δεν εξαντλούνται στην απαρίθμηση και την καταμέτρηση.

Τι θα θέλαμε να ξέρουν τα παιδιά π.χ για τον αριθμό 7 φεύγοντας από το νηπιαγωγείο;

- Να απαγγέλουν τις αριθμολέξεις μέχρι το 7
- Να απαριθμούν 7 αντικείμενα και να γνωρίζουν ότι η τελευταία λέξη εκφράζει το «πόσα είναι»
- Να αναγνωρίζουν και να γράφουν το σύμβολο 7.
- Να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν μοντέλα του 7
- Να γνωρίζουν ότι το 8 και το 9 είναι 1 (αντ. 2) περισσότερο από το 7 (ανάλογα με το *λιγότερο*)
- Να γνωρίζουν τη σχέση του 7 με το 5 και το 10
- Να αναλύουν και να συνθέτουν το 7
- ……………………………………………………………………………….

Σχέσεις μεταξύ αριθμών

- Ίσως το πιο σημαντικό μέρος της κατανόησης για τους αριθμούς αφορά την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των αριθμών.

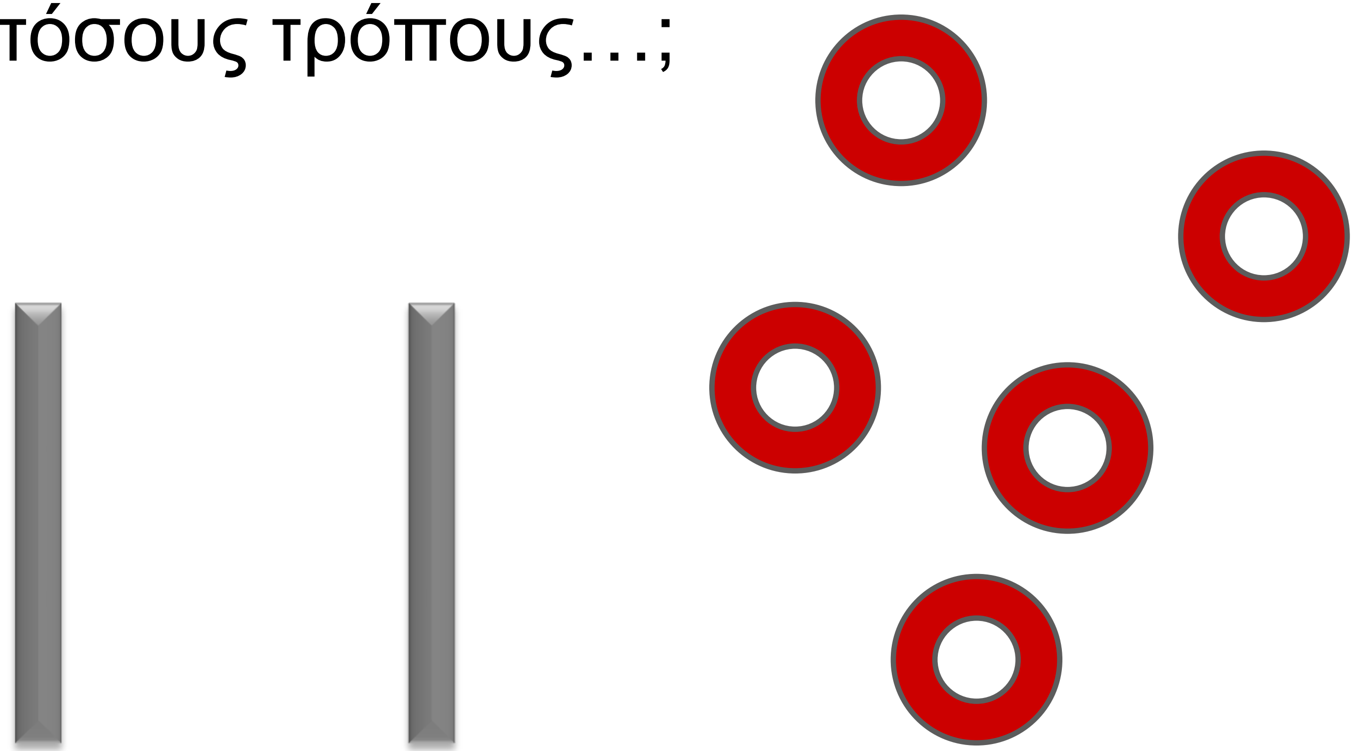
Πρόσθεση και προσθετικές σχέσεις

Οι προσθετικές σχέσεις μεταξύ αριθμών…

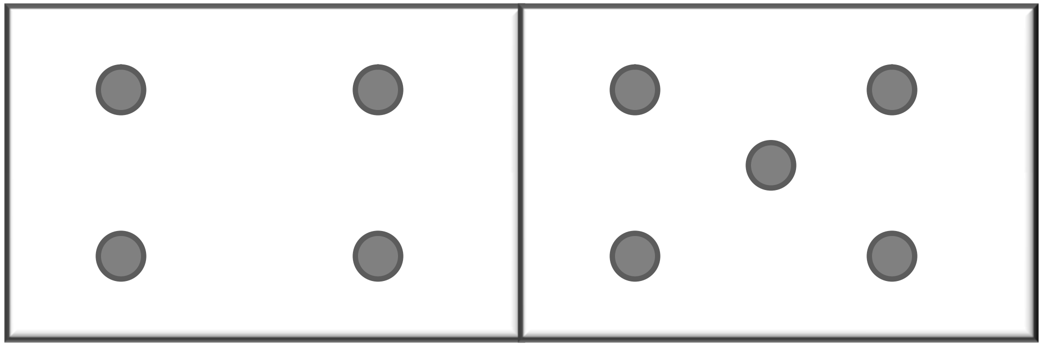
- … είναι θεμελιώδεις στο σύνολο των φυσικών αριθμών
- Σκεφτείτε:
  - 0, 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, …
  - 0, 0+1, 1+1, 2+1, 3+1, 4+1, …
  - Ο επόμενος και ο προηγούμενος φυσικός
  - 5+2=7, 7=5+2, 5+…=7, 7-5=2
- Τι γίνεται με την αφαίρεση; Ποια είναι η βασική διαφορά πρόσθεσης και αφαίρεσης στο σύνολο των φυσικών;

Προσθετική ανάλυση/σύνθεση αριθμού

- Με πόσους τρόπους…;



Προσθετική ανάλυση/σύνθεση αριθμού
Σχέσεις μέρους-μέρους-όλου



- Το 9 (όλον) ως 4 (μέρος) και 5 (μέρος)

Η προσθετική ανάλυση/σύνθεση αριθμών…

- …είναι πολύ σημαντική για την κατανόηση του αριθμητικού συστήματος
  - Και όχι μόνο!

Σκεφτείτε

- 494
- «Τετρακόσια ενενήντα τέσσερα»
- 400 + 90 + 4

- Τι αποκαλύπτει για την αξία θέση των ψηφίων η κατάλληλη προσθετική ανάλυση του αριθμού;
  - Και πόσο βοηθά η φωνολογική ανάλυση;

Σκεφτείτε

- Θέλετε να υπολογίσετε νοερά το άθροισμα 95+7. Ποια στρατηγική ακολουθείτε;
- Θέλετε να υπολογίσετε νοερά τη διαφορά 107-13. Ποια στρατηγική ακολουθείτε;
- Θέλετε να υπολογίσετε νοερά το γινόμενο 12x7. Ποια στρατηγική ακολουθείτε;
- Θέλετε να υπολογίσετε νοερά το πηλίκο 82:9. Ποια στρατηγική ακολουθείτε;

Πώς προσεγγίζουν τα παιδιά…

…την προσθετική ανάλυση/σύνθεση των αριθμών;

Βασισμένοι σε μια σειρά μελετών…

- … οι Nunes & Bryant ισχυρίζονται ότι:
  - Η εξοικείωση με την απαρίθμηση/καταμέτρηση δεν είναι ικανή συνθήκη ώστε τα παιδιά να κατανοήσουν τη δυνατότητα ανάλυσης/σύνθεσης των αριθμών.
    - Π.χ. Ένα παιδί που ξέρει ότι το «επτά» είναι μετά το «έξι» στην αριθμητική ακολουθία, δεν είναι απαραίτητο να έχει κατανοήσει ότι το επτά είναι έξι συν ένα.
  - Η εξοικείωση με την πρόσθεση υποβοηθά την κατάκτηση της προσθετικής ανάλυσης/σύνθεσης των αριθμών

Πρόσθεση

Και η σχέση της με την απαρίθμηση/καταμέτρηση και την προσθετική ανάλυση/σύνθεση των αριθμών

Ερώτημα

- Μπορούν παιδιά 5-6 χρονών να αντιμετωπίσουν ένα πρόβλημα σαν το παρακάτω…

  «Η μαμά της Κατερίνας τής έδωσε 3 καραμέλες. Ο μπαμπάς της τής έδωσε άλλες 5 καραμέλες. Πόσες καραμέλες έχει η Κατερίνα;»

- … αν δεν έχουν διδαχθεί τίποτα σε σχέση με την πρόσθεση και δε γνωρίζουν ότι «πέντε και τρία κάνουν οκτώ»;
  - Και υπό ποιες συνθήκες;

Στρατηγικές πρόσθεσης: Ολική α/κ

- Το παιδί καταμετρά τα στοιχεία του πρώτου συνόλου (3 καραμέλες) και συνεχίζει με τα στοιχεία του δεύτερου συνόλου (5 καραμέλες)

➢ *Ένα, δύο, τρία…Τέσσερα, πέντε, έξι, εφτά, οχτώ. Οχτώ καραμέλες έχει η Κατερίνα!*

Στρατηγικές πρόσθεσης: Μερική α/κ

- Το παιδί «κρατά» το πλήθος των στοιχείων του πρώτου συνόλου (3 καραμέλες) και συνεχίζει καταμετρώντας τα στοιχεία του δεύτερου συνόλου (5 καραμέλες), ξεκινώντας από το 4.

- *(Τρία)…τέσσερα, πέντε, έξι, εφτά, οχτώ. Οχτώ καραμέλες έχει η Κατερίνα!*

Στρατηγικές πρόσθεσης: «Προχωρημένη» μερική α/κ

- Το παιδί «κρατά» το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων (5 καραμέλες) και συνεχίζει καταμετρώντας τα στοιχεία του άλλου συνόλου (3 καραμέλες), ξεκινώντας από το 6.

  - *(Πέντε)…Έξι, εφτά, οχτώ. Οχτώ καραμέλες έχει η Κατερίνα!*

Αναπτυξιακές αλλαγές

- Τα μικρότερα παιδιά συνήθως χρησιμοποιούν την ολική α/κ. Με την ηλικία (και την εμπειρία), υπάρχει μετατόπιση προς τις δυο πιο «προχωρημένες» στρατηγικές
- Παρατηρήστε ότι σε όλες τις περιπτώσεις, η α/κ έχει γίνει εργαλείο για τα παιδιά.
- Τι περισσότερο από την απλή α/κ χρησιμοποιούν τα παιδιά των δύο τελευταίων περιπτώσεων;

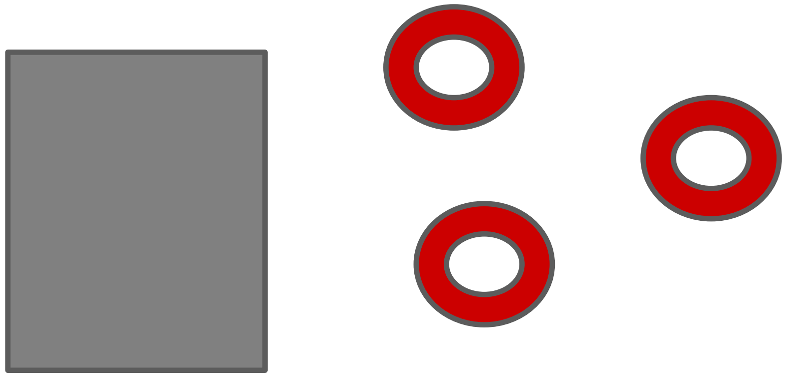
Η χρήση της μερικής α/κ…

- …είναι μια ισχυρή ένδειξη ότι το παιδί έχει αντιληφθεί ότι η διαδικασία α/κ του ενός από τα δύο σύνολα είναι περιττή
  - διότι η γνώση του πληθικού του αριθμού αρκεί για την αντιμετώπιση της κατάστασης που αντιμετωπίζει.
- Στην περίπτωση της «προχωρημένης» μερικής α/κ, τι παραπάνω έχει κατανοήσει το παιδί;

Πώς μπορούμε να υποβοηθήσουμε…

…το πέρασμα από τη στρατηγική ολικής απαρίθμησης, στη στρατηγική μερικής απαρίθμησης;

Ο μη ορατός προσθετέος



- Κάτω από την καρτέλα είναι δύο. Πόσα είναι όλα;
  - Απαρίθμηση από έναν αριθμό και μετά
- Ο Κώστας έχει 3 μαρκαδόρους πάνω στο θρανίο και 2 μέσα στην κασετίνα. Πόσους μαρκαδόρους έχει ο Κώστας;
  - Πρόβλημα πρόσθεσης με μη ορατό προσθετέο

Οι σχέσεις που μελετάμε…

- … συνδέονται προφανώς με την πρόσθεση και την αφαίρεση και η κατανόησή τους ενισχύεται από προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης

Πρόσθεση-Αφαίρεση

Προβλήματα σύζευξης/διαχωρισμού

Προβλήματα Μέρους-μέρους-όλου

Προβλήματα Σύγκρισης

Προβλήματα σύζευξης

- Η κατάσταση
  - Ο Γιάννης είχε 2€.(αρχική κατάσταση)
  - Η Άννα του έδωσε 3€ ακόμα. (αλλαγή)
  - Τώρα ο Γιάννης έχει 5€.(τελική κατάσταση)

- Ανάλογα με ποιο από τα παραπάνω 3 στοιχεία θέτουμε ως ζητούμενο, προκύπτει και ένα διαφορετικό πρόβλημα.

- Δεν είναι όλα τα προβλήματα παρόμοιας δυσκολίας για τα παιδιά
  - Το πρόβλημα στο οποίο δεν είναι γνωστή η αρχική κατάσταση είναι το πιο δύσκολο.

Προβλήματα διαχωρισμού

- Η κατάσταση
  - Ο Γιάννης είχε 5€. (αρχική κατάσταση)
  - Έδωσε 3€ στην Άννα. (αλλαγή)
  - Τώρα ο Γιάννης έχει 2€.(τελική κατάσταση)

- Σκεφτείτε ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση

Προβλήματα μέρους-μέρους-όλου

- Η κατάσταση
  - Ο Γιάννης έχει 3 μήλα. (μέρος)
  - Ο Γιάννης έχει 2 αχλάδια. (μέρος)
  - Ο Γιάννης έχει 5 φρούτα. (όλο)

- Το ζητούμενο μπορεί να είναι κάποιο από τα μέρη ή το όλο.

Προβλήματα σύγκρισης (Ι)

- Η κατάσταση
  - Ο Γιάννης έχει 5€
  - Η Άννα έχει 3€.
  - Ο Γιάννης έχει 2€ περισσότερα από την Άννα.
  - Η Άννα έχει 2€ λιγότερα από το Γιάννη.

- Ανάλογα με ποια στοιχεία θα χρησιμοποιήσουμε ως δεδομένα, προκύπτουν διαφορετικά προβλήματα

Προβλήματα σύγκρισης (ΙΙ)

- Η κατάσταση
  - Ο Γιάννης έχει 5€
  - Η Άννα έχει 3€.
  - Ο Γιάννης έχει 2€ περισσότερα από την Άννα.
  - Η Άννα έχει 2€ λιγότερα από το Γιάννη.
- Τα ερωτήματα
  - Ποιο παιδί έχει περισσότερα; Πόσα περισσότερα;
  - Ποιο παιδί έχει λιγότερα; Πόσα λιγότερα;

Προβλήματα σύγκρισης (ΙΙΙ)

- Η κατάσταση
  - Ο Γιάννης έχει 5€.
  - Η Άννα έχει 3€.
  - Ο Γιάννης έχει 2€ περισσότερα από την Άννα.
  - Η Άννα έχει 2€ λιγότερα από το Γιάννη.
- Το ερώτημα
  - Πόσα έχει η Άννα;

- Με ποιον άλλο τρόπο μπορούμε να ρωτήσουμε για την Άννα;
- Ποιος από τους δύο παραπάνω είναι πιο δύσκολος;

Προβλήματα σύγκρισης (ΙΙΙ)

- Η κατάσταση
  - Ο Γιάννης έχει 5€
  - Η Άννα έχει 3€.
  - Ο Γιάννης έχει 2€ περισσότερα από την Άννα.
  - Η Άννα έχει 2€ λιγότερα από το Γιάννη.
- Οι συνδυασμοί επαναλαμβάνονται
  - ....

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση είναι για μας…

…όχι για να τη διδάξουμε στα παιδιά!

Μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε ότι…

- … προβλήματα «της ίδιας πράξης» παρουσιάζουν διαφορετική δυσκολία για τα παιδιά
  - Π.χ. Τα προβλήματα σύγκρισης είναι πιο απαιτητικά από τα προβλήματα σύζευξης
    - Και η σύγκριση με το «λιγότερο από» πιο απαιτητική από το «περισσότερο από»
- … προβλήματα που προκύπτουν από την ίδια κατάσταση παρουσιάζουν διαφορετική δυσκολία για τα παιδιά, ανάλογα με το ποιο είναι το ζητούμενο
  - Συχνά, λέξεις που παραπέμπουν στην πρόσθεση ή στην αφαίρεση παραπλανούν τα παιδιά

Παράδειγμα

- Η Άννα έχει 4 βόλους. Έχει 2 περισσότερους βόλους από το Γιάννη. Πόσους βόλους έχει ο Γιάννης;

- Ποιο λάθος θα αναμένατε σε αυτό το πρόβλημα;

Στο επίπεδο του Νηπιαγωγείου μας ενδιαφέρει…

- Να μπορούν να μοντελοποιούν τα παιδιά την κατάσταση και μέσω της αναπαράστασης να επιλύουν το πρόβλημα.
  - Δραματοποίηση
  - Υλικά (πούλια, ….)
  - Ζωγραφική

Πώς;

- Ξεκινάμε από τα είδη των προβλημάτων που είναι πιο εύκολα για τα παιδιά, αλλά δεν περιοριζόμαστε σε αυτά

- Δεν κατηγοριοποιούμε τα προβλήματα με βάση την πράξη – αφήνουμε τα παιδιά να δουλέψουν με τη βοήθεια των μοντέλων

- Δουλεύουμε με μικρούς αριθμούς

Μέτρηση

Η πρώτη επαφή των παιδιών με τις συνεχείς ποσότητες (μεγέθη)

Οι φυσικοί αριθμοί…

- … συνδέονται με την απαρίθμηση/καταμέτρηση
  - Έχω μια συλλογή διακριτών αντικειμένων και μπορώ να τα απαριθμήσω ένα-ένα
    - πέντε μήλα, δέκα τετράδια
- … αλλά σε ένα επίπεδο αφαίρεσης πιο πάνω
  - 5 (μονάδες), 10 (μονάδες)
  - Σε αυτό το επίπεδο αφαίρεσης μπορούμε να μιλάμε για τους αριθμούς ωσάν αντικείμενα με δική τους υπόσταση, που δεν εξαρτώνται πια από τα μήλα και τα τετράδια
    - «δύο μήλα» έναντι του «2»

Τι γίνεται όμως όταν θέλουμε…

- … να ποσοτικοποιήσουμε συνεχείς ποσότητες (μεγέθη);
  - Μήκος
  - Βάρος
  - Επιφάνεια
  - Χρόνος
  - ....

Σκεφτείτε

- Με την απαρίθμηση/καταμέτρηση ποσοτικοποιούμε συγκρίσεις που αφορούν διακριτές ποσότητες
  - Από το «πιο πολλά μήλα» στο «πόσα πιο πολλά; πόσα;»
- Με τη μέτρηση ποσοτικοποιούμε συγκρίσεις που αφορούν συνεχείς ποσότητες
  - Από το «ψηλότερος» στο «πόσο πιο ψηλός; πόσο ύψος έχει;»

Μέτρηση (π.χ. μήκους) (Ι)

- Κατά μία έννοια, το πρόβλημα της μέτρησης μπορεί να αναχθεί στην απαρίθμηση
  - Επιλέγουμε μια αυθαίρετη μονάδα μέτρησης
  - Μετράμε πόσες τέτοιες μονάδες συνιστούν το μέγεθος που μας ενδιαφέρει
  - Διαφορετικά, μετράμε πόσες φορές χωράει η μονάδα μας στο μέγεθος που μας ενδιαφέρει
    - Προτρέχοντας λίγο: Τι σας έρχεται στο μυαλό όταν ακούτε την έκφραση «(μετράω) πόσες φορές χωράει το… στο…»;

Μέτρηση (π.χ. μήκους) (ΙΙ)

- Τι πρόβλημα αντιμετωπίζουμε όταν μετράμε π.χ. το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος με μια αυθαίρετη μονάδα μέτρησης;
  - Πολύ συχνά, κάτι «περισσεύει»
  - Χρειάζεται να μετρήσουμε κάτι που είναι μικρότερο από την αρχική μονάδα μέτρησης
- Πώς λύνουμε αυτό το πρόβλημα;
  - Μετράμε με υποδιαιρέσεις της αρχικής μας μονάδας

Στην καθημερινή ζωή…

- … οι υποδιαιρέσεις της (τυπικής) μονάδας (π.χ.) μήκους είναι πολύ συγκεκριμένες
  - Αρχική μονάδα: Μέτρο
  - Υποδιαιρέσεις: Δεκατόμετρο, εκατοστόμετρο, χιλιοστόμετρο
  - Σε πόσα (ίσα) μέρη έχουμε σπάσει την αρχική μονάδα σε κάθε περίπτωση;

Στον αφηρημένο «κόσμο» των αριθμών…

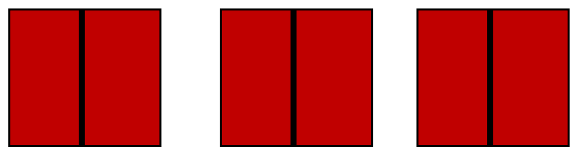
- …έχουμε την (αφηρημένη) μονάδα 1
- Μπορούμε να τη «σπάσουμε»
  - σε δύο (ίσα) κομμάτια
    - Υποδιαίρεση: 1/2
  - Σε τρία (ίσα) κομμάτια
    - Υποδιαίρεση: 1/3
  - ……………………….
  - Σε ν (ίσα) κομμάτια:
    - Υποδιαίρεση: 1/ν

- Σε μέχρι πόσα κομμάτια μπορούμε να σπάσουμε τη μονάδα;

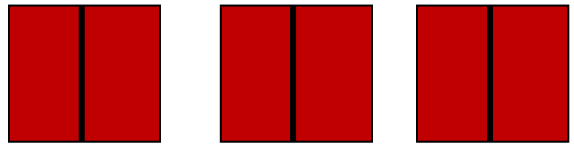
Τι κοινό έχουν η απαρίθμηση και η μέτρηση;

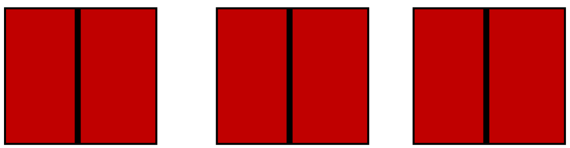
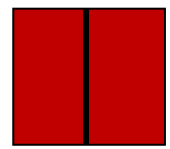
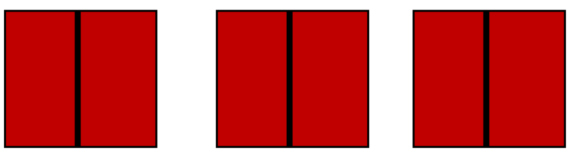
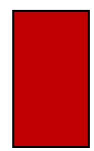
Εστιάζοντας στον (παραμελημένο) ρόλο της μονάδας στην απαρίθμηση

Η μονάδα στην απαρίθμηση: Πόσα είναι;



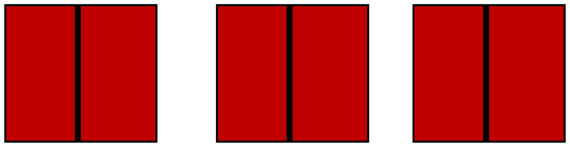
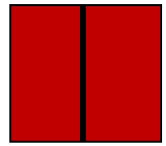
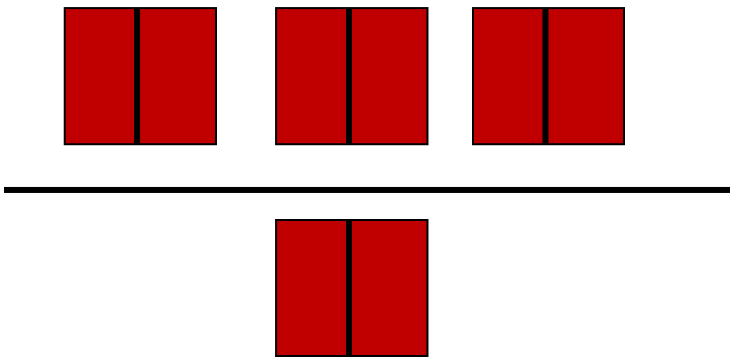
Η μονάδα στην απαρίθμηση: Πόσα είναι;

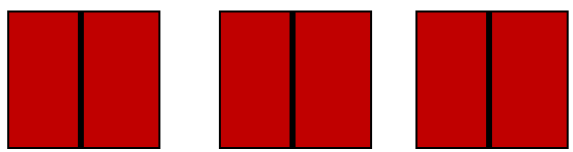
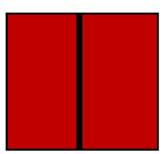


-  = 3 
-  = 6 

➢ Όταν απαριθμούμε, η μονάδα συνήθως μάς είναι προφανής (γι’ αυτό και συχνά δεν αναγνωρίζουμε τη σημασία της).

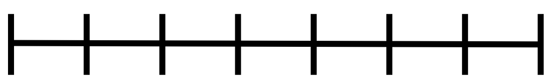
Όταν απαριθμούμε…

- …συγκρίνουμε με τη μονάδα
-  = 3 
-  $= \frac{3}{1}$

➢ Η **σχέση** των  με τη μονάδα  είναι ο **λόγος** 3/1

πλήθος

Η μονάδα στη μέτρηση (π.χ. μήκους): Πόσο είναι;

- Μετρώ με μονάδα : 
- = 3 και περισσεύει το 1/2 της μονάδας
- Ξαναμετρώ με υποδιαίρεση της αρχικής μονάδας, συγκεκριμένα το 1/2 της μονάδας:
- 
- = 7

Με άλλα λόγια

- = 7

- $= \frac{7}{1}$

➢ Η **σχέση** του

με τη μονάδα — είναι ο **λόγος** 7/1

μήκος

Από την υποδιαίρεση, πίσω στην αρχική μονάδα

- = 7
- $= 7.\frac{1}{2}$

➢ Η **σχέση** του με την (αρχική) μονάδα είναι ο **λόγος** 7/2

μήκος

Συνοψίζοντας

- Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την απαρίθμηση και τη μέτρηση με ένα κοινό τρόπο:
  - Διαδικασία σύγκρισης με μια μονάδα μέτρησης, στο τέλος της οποίας βρίσκουμε τη σχέση της ποσότητας που μας ενδιαφέρει (είτε διακριτής, είτε συνεχούς) με τη μονάδα ως λόγο δύο φυσικών* αριθμών
- Υπό αυτή την έννοια, μπορούμε να δούμε ένα κοινό στοιχείο ανάμεσα στο 3/1, που γνωρίζουμε ότι «είναι» ένας φυσικός αριθμός, και το 7/2, που γνωρίζουμε ότι δεν «είναι»
  - Είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης

---

* Προς το παρόν

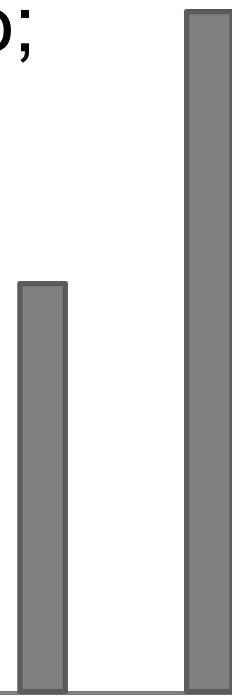
Τι πρέπει να καταλάβουν τα παιδιά…

…ώστε να είναι σε θέση να μετρήσουν;

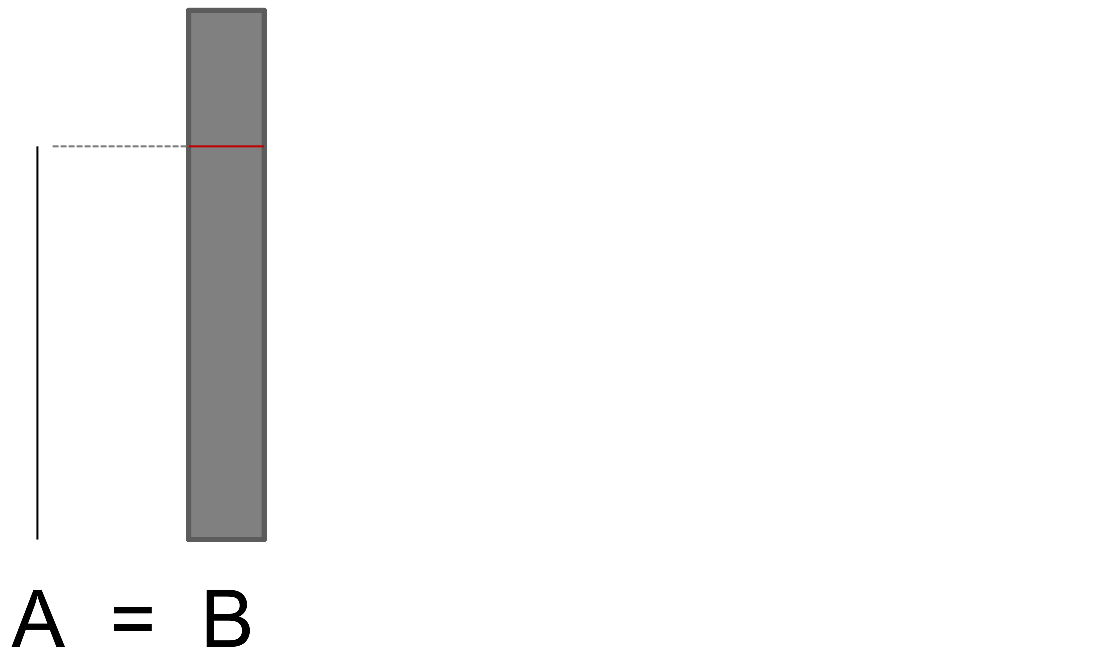
Κάποιες συγκρίσεις…

- …μπορούν να γίνουν άμεσα

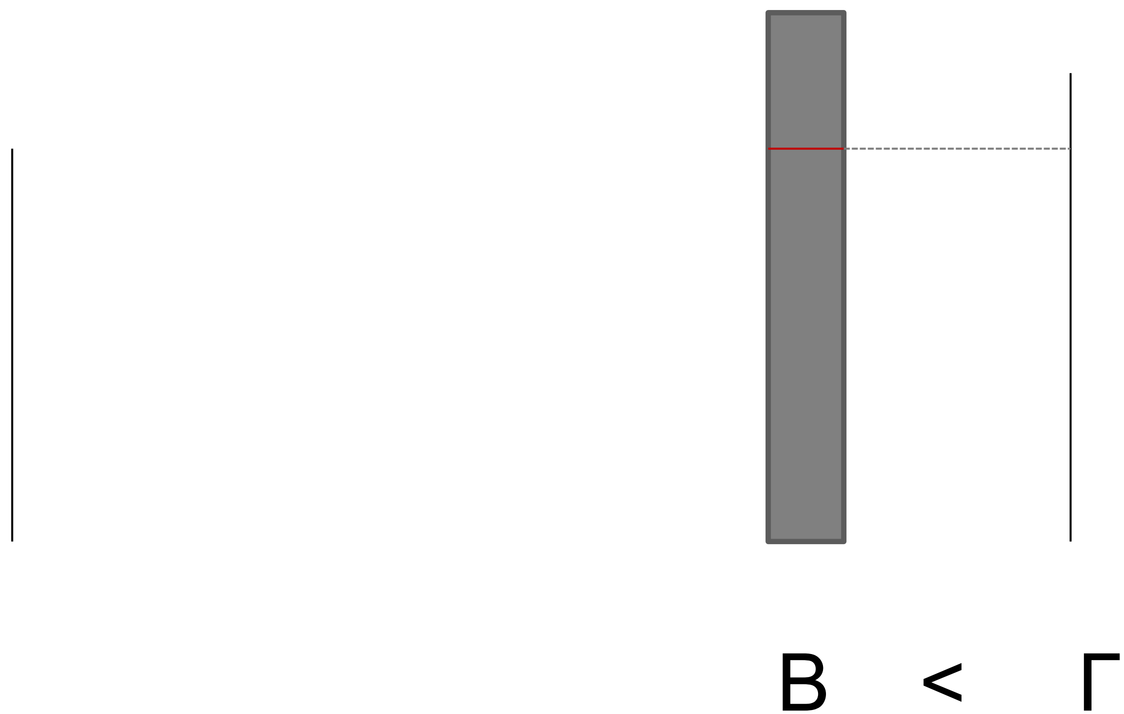
➢ Ποιο είναι πιο ψηλό;



Κάποιες συγκρίσεις είναι έμμεσες Ι



Κάποιες συγκρίσεις είναι έμμεσες ΙΙ



Μεταβατικός συμπερασμός

Άρα, Α<Γ!

Ο μεταβατικός συμπερασμός…

- …σε αυτή την περίπτωση κατακτάται από τα παιδιά σχετικά νωρίς
  - Παιδιά 5-6 ετών δεν έχουν δυσκολία στο να χρησιμοποιήσουν διαμεσολαβητικά όργανα προκειμένου να συγκρίνουν π.χ. μήκη

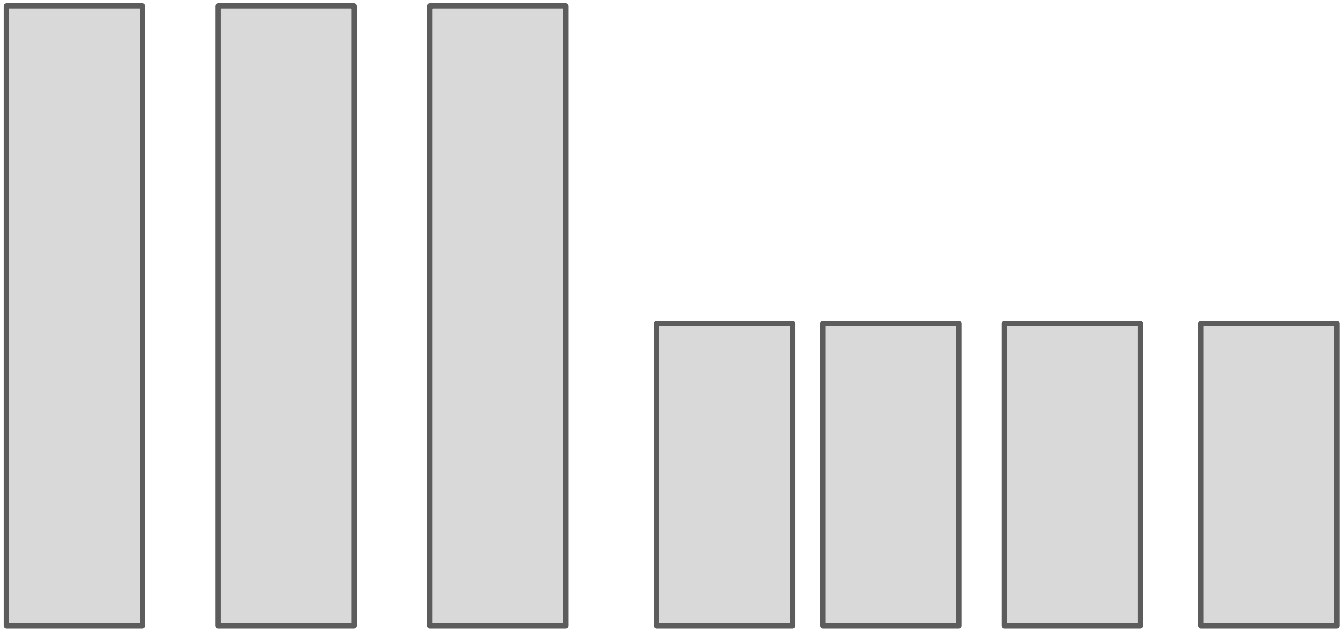
- Οι Bryant & Kopytynska (1976) έδωσαν σε παιδιά αυτής της ηλικίας δύο ξύλινους κύβους, καθένας από τους οποίους είχε μία οπή σε μια πλευρά και τους ζήτησαν να απαντήσουν ποια είχε μεγαλύτερο «βάθος». Υπήρχε διαθέσιμη μια διαβαθμισμένη βέργα.
  - Τα περισσότερα παιδιά την αξιοποίησαν αυθόρμητα για να επιλύσουν αυτό το πρόβλημα

Η έννοια της μονάδας…

- …είναι θεμελιώδης στη μέτρηση
  - όπως και στην απαρίθμηση/καταμέτρηση
- Όταν μετράμε μια ποσότητα, στο αποτέλεσμα της μέτρησης εμπλέκονται ένας αριθμός (ή και περισσότεροι), η μονάδα μέτρησης (ενδεχομένως και υποδιαιρέσεις της μονάδας).
  - Π.χ. 3 ευρώ, 2,50 ευρώ, 2 ευρώ και 50 λεπτά
- Η σχέση μεταξύ αυτών των στοιχείων δεν είναι απλή.

Πόσα «μεγάλα» ποτήρια νερό; *

* Τα μεγάλα είναι διπλάσια από τα μικρά



Davydof, 1982

Μονάδες μέτρησης, αριθμός και ποσότητα που εκφράζεται σε πλήθος μονάδων

- Η πατούσα μου έχει μήκος 5
- Η δική μου πατούσα έχει μήκος 5
- ....

Μονάδες μέτρησης, αριθμός και ποσότητα που εκφράζεται σε πλήθος μονάδων

- Έχει μήκος 5 …
- Έχει μήκος 10 …

➢ Ποιος μέτρησε με τι;

Σε μια σειρά σχετικών πειραμάτων…

- … οι Nunes & Bryant βρήκαν ότι:
  - Μερικά παιδιά 5 και 6 ετών και τα περισσότερα παιδιά των 7 ετών αντιλαμβάνονται ότι αν ο αριθμός των μονάδων είναι ίδιος, αλλά οι μονάδες είναι διαφορετικές, το συνολικό μέγεθος είναι διαφορετικό. (βλ. «πατούσες»)
  - Όταν απαιτείται μετατροπή μιας μονάδας σε μια άλλη, τότε τα παιδιά των 5 και των 6 ετών δυσκολεύονται σοβαρά (βλ. «ποτήρια»)

Μικρά παιδιά και χάρακας…

… ως ένας τρόπος να ελεγχθεί κατά πόσο αντιλαμβάνονται το ρόλο της μονάδας (και των αριθμών)

Σκεφτείτε τα παρακάτω έργα

- Δίνετε σε παιδιά 5-6 χρονών ένα σχέδιο «χάρακα», στον οποίο οι αποστάσεις ανάμεσα στους αριθμούς είναι άνισες και ρωτάτε αν είναι σωστά φτιαγμένος.
- Δίνετε στα παιδιά ένα διαβαθμισμένο χάρακα από τον οποίο «λείπουν» οι αριθμοί και ζητάτε να τους τοποθετήσουν.
- Δίνετε στα παιδιά ένα «σπασμένο» χάρακα, ο οποίος ξεκινάει από το 4.

Οι γνωστοί σας Nunes & Bryant...

- ...έδωσαν παρόμοια έργα σε 92 παιδιά ηλικίας 5-6 χρονών
  - Που είχαν εμπειρία στη μέτρηση με μη συμβατικές μονάδες, αλλά μικρή εμπειρία στη μέτρηση με χάρακα.
- Βρήκαν ότι:
  - ένα σημαντικό ποσοστό των παιδιών αυτής της ηλικίας (περίπου 60%) αναγνωρίζει ότι τα διαστήματα μεταξύ των αριθμών πρέπει να είναι ίσα.
  - Η μεγάλη πλειοψηφία των παιδιών ξεκινούσε να τοποθετεί αριθμούς από το 1 (στο πρώτο σημάδι του χάρακα).
- Οι ερευνητές συμπέραναν ότι τα παιδιά δεν έχουν κατανοήσει ότι τα ίσα διαστήματα μεταξύ των αριθμών είναι η μονάδα μέτρησης

«Ασυνήθιστα» έργα μέτρησης…

- …όπως αυτό με το «σπασμένο» χάρακα μπορούν να αναδείξουν τις δυσκολίες που έχουν τα παιδιά με την ιδέα της μονάδας μέτρησης.
  - Μπορούν όμως να δώσουν στα παιδιά την ευκαιρία να προβληματιστούν, να συζητήσουν και να αναστοχαστούν πάνω στις σχετικές μαθηματικές ιδέες
- Σε γενικές γραμμές, πάντως, παιδιά 6-7 χρονών μπορούν να αναπτύξουν μια καλή κατανόηση για τις σχέσεις που ενυπάρχουν στο αποτέλεσμα μιας μέτρησης

Μέτρηση…

… στο Νηπιαγωγείο

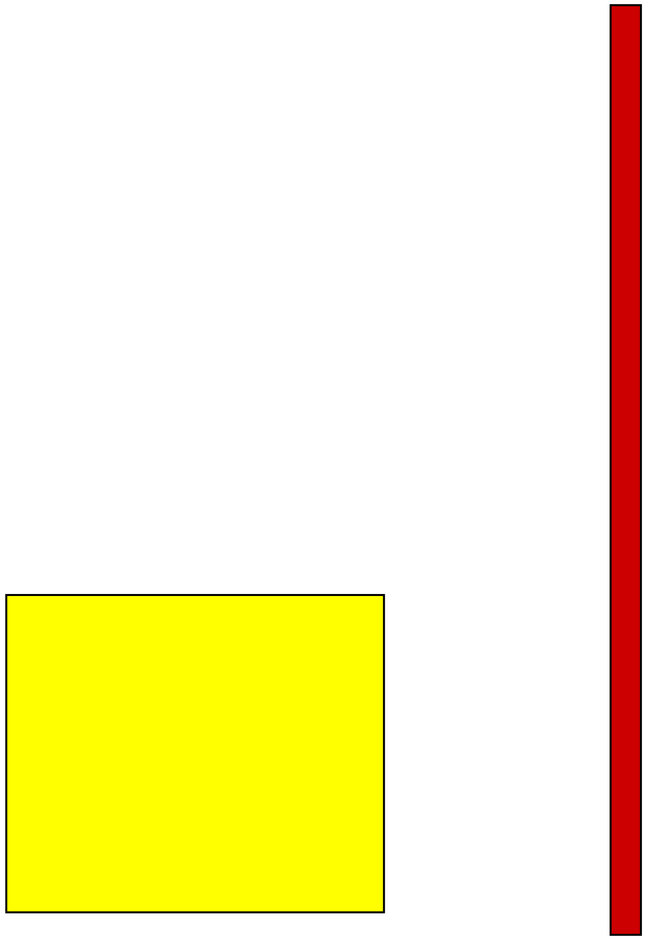
Μεγέθη

- Μήκος
- Επιφάνεια
- Όγκος

«Συστατικά»

- Συγκρίσεις
  - Γιατί;
- Εκτιμήσεις
  - Γιατί;
- Άτυπες Μονάδες
- Τυπικές Μονάδες
- Χρήση συνήθων οργάνων μέτρησης

Συγκρίνετε ☺



Με τη σύγκριση…

- …στρέφεται η προσοχή των παιδιών στο μέγεθος που θα μετρηθεί.

- Θυμηθείτε: Οι λέξεις μπορεί να είναι «βάρος» ή εργαλείο

Άτυπες μονάδες

- Σκεφτείτε τη έκφραση «είναι τρία τσιγάρα δρόμος»
  - Ποιο είναι το μέγεθος που μετράται;
  - Ποια είναι η μονάδα μέτρησης;
- Σκεφτείτε δύο διαφορετικές άτυπες μονάδες για:
  - Το μήκος
  - Την επιφάνεια
  - Τον όγκο

Μονάδες

- Μέτρηση με επανάληψη της μονάδας, ή χωρίς

- Τι εικάζετε ότι είναι πιο εύκολο για τα παιδιά;
  - Γιατί να μπούμε στον κόπο να κάνουμε και το πιο δύσκολο;

Τυπικές μονάδες – Γιατί;

- Θυμηθείτε τη σημασία των συμβάσεων για τα Μαθηματικά
  - Πώς πείθονται τα παιδιά ότι υπάρχει αναγκαιότητα για τέτοιου είδους συμβάσεις;

Κάτι τελευταίο

- Στο Αναλυτικό σας Πρόγραμμα, οι μετρήσεις ανήκουν στον άξονα Χώρος-Γεωμετρία-Μετρήσεις

- Κρατήστε στο μυαλό σας πόσο σημαντική είναι η μέτρηση για την έννοια του αριθμού